

計算モデル：ラムダ計算（２）

胡 振江
東京大学計数工学科



β簡約

$$(\lambda x.P)Q \rightarrow_{\beta} P[x := Q]$$

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} N}{LM \rightarrow_{\beta} LN}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} N}{ML \rightarrow_{\beta} NL}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} N}{\lambda x.M \rightarrow_{\beta} \lambda x.N}$$



• 例

$$(\lambda x.xy)zw \rightarrow_{\beta} zyw$$

$$II \equiv (\lambda x.x)I \rightarrow_{\beta} I$$

$$KI(II) \equiv (\lambda xy.x)I(II) \rightarrow_{\beta} (\lambda y.I)(II) \rightarrow_{\beta} I$$

$$KI(II) \rightarrow_{\beta}^* I$$



β 同値関係

$$\frac{M \rightarrow_{\beta}^* N}{M =_{\beta} N}$$

$$\frac{M =_{\beta} N}{N =_{\beta} M}$$

$$\frac{M =_{\beta} N \quad N =_{\beta} L}{M =_{\beta} L}$$



β正規形

- β 正規形: 部分項に β 可簡約項を含まない λ 項
- $M =_{\beta} N$ かつ N が β 正規形であるとき、 M は β 正規形を持つという。

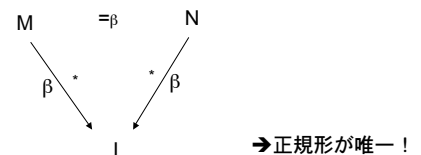
問題：次の項はβ正規形を持つか？

- $(\lambda x.x y) z w$
- $\Omega = (\lambda x.x x) (\lambda x.x x)$
- $K I \Omega$



Church-Rosser定理（CR性）

$$M =_{\beta} N \Rightarrow \exists L.(M \rightarrow_{\beta}^* L \wedge N \rightarrow_{\beta}^* L)$$



合流性 (Congrence)

$$M \rightarrow_{\beta}^* M_1 \wedge M \rightarrow_{\beta}^* M_2 \\ \Rightarrow \exists M_3. M_1 \rightarrow_{\beta}^* M_3 \wedge M_2 \rightarrow_{\beta}^* M_3$$

CR性 $\leftrightarrow$ 合流性



簡約の方法

どの位置にある簡約項を簡約するかによって、次の簡約方法が考えられる。

- 最左簡約
- 内部簡約



最左簡約 (leftmost reduction)

- 最左可簡約項
 - 最も左にある簡約項
 - 例 $(\lambda x. x) ((\lambda y. y) u)$

- 最左簡約
 - $M \rightarrow_i N$

頭部簡約項は最左簡約項である



内部簡約 (internal reduction)

- 内部可簡約項
 - 例 $(\lambda x. x) ((\lambda y. y) u)$

- 内部簡約
 - $M \rightarrow_i N$



標準簡約

- $\rightarrow_s$

任意の簡約 $M \rightarrow^* N$ に対して、
 $M \rightarrow_s^* N$
 となるような簡約方法。

最左簡約、内部簡約は標準簡約ではない。

どうして？



内部簡約：標準簡約ではない

$$M = (\lambda x y z. z x) (I I) \Omega \\ N = \lambda z. z I$$

内部簡約

$$M \rightarrow_i (\lambda x y z. z x) I \Omega \\ \rightarrow_i (\lambda x y z. z x) I \Omega$$

頭部簡約の後内部簡約でOK



最左簡約は標準簡約ではない

$M = (\lambda x y z. z x) (I I) \Omega$

$N = (\lambda z. z I) \Omega$

最左簡約

$M \rightarrow_i (\lambda y z. z (I I)) \Omega$

$\rightarrow_i \lambda z. z (I I)$



標準簡約の定義

1. 可簡約項を左から右へと簡約する
2. 左にある可簡約項を簡約しない場合、後で簡約することができない

例: $M = (\lambda x y z. z x) (I I) \Omega$

– $\circ: M \rightarrow (\lambda y z. z (I I)) \Omega$

$\rightarrow (\lambda y z. z I) \Omega$

– $\times: M \rightarrow (\lambda y z. z (I I)) \Omega$

$\rightarrow (\lambda y z. z I) \Omega$

$\rightarrow \lambda z. z I$



正規化簡約戦略

• 正規化戦略

- β 正規形をもつ任意の λ 項 M に対して、有限個の簡約ステップで正規形を求めることができる簡約戦略

• 最左簡約戦略は正規化戦略



• 最左簡約戦略例

$x ((\lambda u v w. u w (v w)) (I x) (I (I I)) z)$

$\rightarrow x ((\lambda v w. (I x) w (v w)) (I (I I)) z)$

$\rightarrow x ((\lambda w. (I x) w ((I (I I)) w)) z)$

$\rightarrow x ((I x) z ((I (I I)) z))$

$\rightarrow x (x z ((I (I I)) z))$

$\rightarrow x (x z ((I I) z))$

$\rightarrow x (x z (I z))$

$\rightarrow x (x z z)$



λ 項による計算のコーディング

• ブール計算

– $\text{true} = \lambda t f. t$

– $\text{false} = \lambda t f. f$

– $\text{test} = \lambda l m n. l m n$

– $\text{and} = \lambda b c. b c \text{ false}$

注: $\lambda b c. \text{test } b c \text{ false}$

– $\text{or} = ?$

– $\text{not} = ?$



• 組

– $\text{pair} = \lambda f s b. b f s$

– $\text{fst} = \lambda p. p \text{ true}$

– $\text{snd} = \lambda p. p \text{ false}$

問題: $\text{fst} (\text{pair } v w) = v$ を証明せよ。



- Church numbers

- $0 = \lambda s z. z$
- $1 = \lambda s z. s z$
- $n = \lambda s z. s (s \dots (s z) \dots)$
- $\text{succ} = \lambda n s z. s (n s z)$
- $\text{plus} = \lambda m n s z. m s (n s z)$
- $\text{times} = \lambda m n. m (\text{plus } n) 0$
- $\text{isZero} = \lambda m. m (\lambda x. \text{false}) \text{true}$



演習問題

1. $M[x:=N][x:=L] = M[x:=N[x:=L]]$ を証明せよ。
2. $M = (\lambda y. (\lambda x. y (x x)) (\lambda x. y (x x))) a$ とする。M を β 簡約して得られる λ 項をすべて求めよ。また、 $M =_{\beta} a M$ であることを示せ。
3. $(\lambda x y. (\lambda w. w w) x y) (S a) (K I)$ を最左簡約戦略で β 正規形までの簡約を示せ。
4. $\text{snd} (\text{pair } v w) = w$ を証明せよ。



ノートの提出に関して

- 講義ノートに演習問題の回答を書いて、次回（5月10日）の講義の時に提出してください。

