代入定理と永続強正規化可能性

Substitution Theorem and Persistent Strong Normalization

龍田 真 [†]　　マリアンジェラ・デザニ [††]

Makoto Tatsuta　　Mariangiola Dezani-Ciancaglini

[†] 国立情報学研究所　　[††] トリノ大学

National Institute of Informatics　　Torino University

tatsuta@nii.ac.jp　　dezani@di.unito.it

代入定理とは，ラムダ計算において，どのような項 M に関しても，項 M に任意の一つの強正規化可能な項を代入しても強正規化可能なら，項 M に異なるいくつかの強正規化可能な項を代入しても強正規化可能であるという定理である．本論文はこの定理を証明する．永続強正規化可能性の共通型型理論による特徴付けは未解決問題であったが，この定理を応用することにより解決する．

1 はじめに

永続強正規化可能性とは，λ計算における項の性質で，任意個数の強正規化可能な引数を適用しても強正規化可能であることである．また，永続弱正規化可能性は，任意個数の弱正規化可能な引数を適用しても弱正規化可能であることである．同様にして，永続頭正規化可能性など，様々な正規化性に対応してそれぞれの永続正規化性が考えられる．永続正規化性は，このように数学的に基本的性質でありそれ自体興味深い上に，perpetual strategy やλモデルに関連した性質をもち，研究されてきた [3, 2].

[2] では，それまでの永続正規化性の研究をまとめ，永続弱正規化可能性や永続頭正規化可能性などのいくつかの永続正規化可能性に対して，対応する共通型型理論を用いて特徴付けを与えた．しかし，その論文では，永続強正規化可能性の共通型型理論による特徴付けに関しては，[3] による型理論 $\mathcal{HL}$ による特徴付けが予想として述べられるだけで，未解決問題として残されていた．本論文はこの予想を肯定的に証明することによりこの問題を解決する．

この証明は，永続強正規化可能性の帰納的定義を用いて行う．近年, 強正規化可能性の帰納的定義が研究され，強正規化可能性の新しい証明方法を与えてきた [4]．この手法を永続強正規化可能性に応用する．この帰納的定義を介することにより, 項が永続強正規化可能であれば，帰納的定義に関する帰納法により，型理論 $\mathcal{HL}$ において型付けできることが証明できる．この帰納的定義の完全性を証明するために，次に述べる代入定理を必要とする．

代入定理とは，任意の強正規化可能な X に対して $M[x := X, y := X]$ が強正規化可能なら，任意の強正規化可能な X, Y に対して $M[x := X, y := Y]$ が強正規化可能であるという定理である．ここで，$M[x := X, y := Y]$ は M 中の自由変数 x, y にそれぞれ項 X, Y を代入することを表す．これは 2 引数の場合だが，n 引数に拡張しても成り立つ．

この定理の証明のために，[2] における隣接置換パスと [1] にある Klop 計算の二つのアイデアを用いた．[2] にある補題を拡張し，また，この補題のほぼ逆を主補題として証明することにより弱正規化可能性に関する代入定理が証明できる．Klop 計算を組み合わせることにより，強正規化可能性が弱正規化可能性に帰着され，弱正規化可能性に関する代入定理と同様のアイデアにより, 代入定理が証明できる．

本論文は，[5] の結果を異なる角度から説明し，また，新しい定理として代入正規化可能性の特徴付け定理および決定可能性定理を追加したものである．

第 2 節では，定義を述べ二つの主定理を説明する．第 3 節では，隣接置換パスを説明し，弱正規化可能性に関する代入定理の証明のアイデアを述べる．第 4 節では，Klop 計算を説明し，代入定理の証明のアイデアを述べる．また，代入正規化可能性の特徴付け定理および決定可能性定理を示す．第 5 節では，永続強正規化可能性の帰納的定義を与え，その健全性と完全性を示す．完全性定理の証明において代入定理がどのような役割を果たすか示す．第 6 節では，共通型型理論 $\mathcal{HL}$ を定義し，永続強正規化可能性の型理論 $\mathcal{HL}$ を用いた特徴付けを証明する．

2 主定理

本論文では λ 計算に関して次の記号を用いる．$x, y, z, w, t, u, v, \ldots$ は変数，$M, N, L, P, X, Y, \ldots$ は項，$M \to_\beta N$ は 1 ステップ β 簡約，$\to_\beta^*$ は $\to_\beta$ の反射推移閉包，$\vec{M}$ は列 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ $(n \geq 0)$, $\vec{x}$ が $x_1, \ldots, x_n$ で $\vec{M}$ が $M_1, \ldots, M_m$ のとき $\lambda\vec{x}.N\vec{M}$ は $\lambda x_1 \ldots x_n.NM_1 \ldots M_m$, $lh(\vec{M})$ は $\vec{M}$ の長さ，$\mathcal{C}$ が項の集合のとき $\vec{M} \in \mathcal{C}$ は $\vec{M}$ 中の各 M_i について $M_i \in \mathcal{C}$，$=$ は構文的等号, $M[x := N]$ は N を M 中の自由な x へ代入したもの, $M[x_1 := N_1, \ldots, x_n := N_n]$ や $M[\vec{x} := \vec{N}]$ は同時代入，$FV(M)$ は M の自由変数全体, Λ は項全体, $|M|$ は簡約列の最大長を，それぞれ表す．

項 M が強正規化可能とは，$M \to_\beta M_1 \to_\beta \ldots$ となる無限列がないことと定める．

項 M が永続強正規化可能とは，任意の n, 任意の強正規化可能な項 $X_1, \ldots, X_n$ に対して，$MX_1 \ldots X_n$ が強正規化可能であることと定める．

例えば, x は永続強正規化可能である．なぜなら，$X_1, \ldots, X_n$ が強正規化可能なら $xX_1 \ldots X_n$ は強正規化可能であるからである．一方，$\lambda x.x$ は永続強正規化可能でない．なぜなら，$\lambda x.xx$ を Δ で表すと，$(\lambda x.x)\Delta\Delta$ は強正規化可能でないからである．

本論文では主として次の二つの定理を示す．

定理 2.1 (代入定理) *M を任意の項, $x_1, \ldots, x_n$ をその自由変数とする．任意の x_i, x_j $(1 \leq i \leq j \leq n)$，任意の強正規化可能な項 X に対して $M[x_i := X, x_j := X]$ が強正規化可能ならば，任意の強正規化可能な項 $X_1, \ldots, X_n$ に対して $M[x_1 := X_1, \ldots, x_n := X_n]$ は強正規化可能である．*

第 6 節で定義される型理論 $\mathcal{HL}$ に関して次が成り立つ．

定理 2.2 (永続強正規化可能性の特徴付け) *Γ_ω を $\{x{:}\omega \mid x \in Var\}$ とおく．*

(1) M が強正規化可能であることと $\Gamma_\omega \vdash M{:}\varphi$ は同等．

(2) M が永続強正規化可能であることと $\Gamma_\omega \vdash M{:}\omega$ は同等．

定理 2.2 は，M が永続強正規化可能であることと，型理論 $\mathcal{HL}$ において M が型 ω をもつことは同等であることを述べている．

定理 2.1 で，M を $Mx_1 \ldots x_n$ にとると次が得られる．

系 2.3 *任意の強正規化可能な X に対して $MX \ldots X$ (X は n 回) が強正規化可能なら，任意の強正規化可能な $X_1, \ldots, X_n$ に対して $MX_1 \ldots X_n$ が強正規化可能である．*

本論文では以下これらの定理の証明の鍵となるアイデアを説明し，証明の概略を与える．定理 2.1 の証明は第 4 節で，定理 2.2 の証明は第 6 節に与える．

3 弱正規化可能性に関する代入定理と隣接置換パス

わかりやすく説明するため，まず，弱正規化可能性に関する代入定理を考える．

M が弱正規化可能とは，列 $M \to_\beta M_1 \to_\beta \ldots \to_\beta M_n$ が存在して M_n が正規形であることと定める．

定理 3.1 (弱正規化可能性に関する代入定理) *M を任意の項, $x_1, \ldots, x_n$ をその自由変数とする．任意の x_i, x_j $(1 \leq i \leq j \leq n)$, 任意の弱正規化可能な項 X に対して $M[x_i := X, x_j := X]$ が弱正規化可能ならば，任意の弱正規化可能な項 $X_1, \ldots, X_n$ に対して $M[x_1 := X_1, \ldots, x_n := X_n]$ は弱正規化可能である．*

これを証明するためには，隣接置換パス (adjacent replacement paths) のアイデアを用いる．

今，M が正規形だが，正規形 X,Y が存在して $M[x := X, y := Y]$ が弱正規化可能でないときの状況を考えよう．例えば M が xy のときそうである．X と Y として Δ が選べる．次に M が $x(\lambda x_1.x_1y)$ のときを考えよう．このときにも，$\lambda u.u\Delta$ を X に，Δ を Y に選ぶことができる．なぜなら，$(\lambda u.u\Delta)(\lambda x_1.x_1\Delta) \to^* \Delta\Delta$ だからである．$\lambda u.u\Delta$ を x に入れることによって，簡約が進むと結局 Δ を x_1 に入れることができた．さらに，適切な項を x に対して選ぶことにより，任意の項を x_1 に結局入れることができる．このことを x が x_1 を M 中で制御するという．M が $x(\lambda x_1.\ldots x_1(\lambda x_2.\ldots x_2y\ldots)\ldots)$ の形なら x は x_1 を制御し，x_1 は x_2 を制御する．ゆえに x は x_2 を制御する．箱により変数の出現を表すと，制御関係は次のように表せる．

$$\boxed{x}(\lambda x_1.\ldots\boxed{x_1}(\lambda x_2.\ldots\boxed{x_2}y\ldots)\ldots)$$

変数出現の列 $(\boxed{x}, \boxed{x_1}, \boxed{x_2})$ を数字でコード化して記述したものを置換パスとよび，後に定義を与える．ここでは説明のため変数出現の列自体も置換パスとよぶ．

次に隣接置換パスを説明する．M を $xN(\lambda z.y)$ としよう．$\lambda uv.\Delta(vz)$ を X，Δ を Y に選ぶことにより，$M[x := X, y := Y]$ は弱正規化可能でなくなる．なぜなら，$(\lambda uv.\Delta(vz))N(\lambda z.\Delta) \to^* \Delta\Delta$ だからである．ここでは，x と y は間接的に関数適用を構成している．つまり，適当な項 X, Y を x, y に入れることにより, 簡約の後結局任意の適用 X_1Y_1 が得られる．このような変数出現の組 x,y を M 中で隣接しているとよぶ.

隣接置換パスとは，二つの置換パスの組 $(x, x_1, \ldots, x_n)$ と $(y, y_1, \ldots, y_m)$ であり，変数出現 x_n, y_m が隣接しているものを指す．M が x と y から始まる隣接置換パスをもつなら，適当な項 X, Y を選ぶことにより，$M[x := X, y := Y]$ は，簡約の後結局 $\Delta\Delta$ を含む項になり，弱正規化可能でない.

定義 3.2 M を正規形, x を M 中の変数出現とする．これは束縛されていてもよい．x によりこの変数出現も表す.

変数出現 x の M 中の置換パス $\pi(x, M)$ は次のように定義される.

(1) x が M 中自由なとき，$\pi(x, M) = x$

(2) $\pi(x, M) = y\alpha\langle i, j\rangle$，ただし，$M = C[zN_1 \ldots N_{i-1}(\lambda t_1 \ldots t_{j-1}x.L)]$, $C[\ ]$ は文脈，x は L 中で自由, $\pi(z, C[z]) = y\alpha$.

順序 $x \rightsquigarrow y$ を，ある α が存在して $\pi(y, M) = x\alpha$ となることと定める．置換パス $x\alpha$ を $x \rightsquigarrow y$ と表すこともある.

例．M を $x(uv)(\lambda y_1y_2y_3.uv(y_3(\lambda z_1z_2.uz_2v)))$ とおくと $\pi(z_2, M) = x\langle 2, 3\rangle\langle 1, 2\rangle$ である．コードの読み方は次のようである．M 中の束縛変数出現 z_2 に外部からアクセスする方法は，まず自由変数 x から始め，その第 2 引数 $(\lambda y_1y_2y_3.\ldots)$ に行き，その第 3 束縛変数 y_3 に行き, y_3 の第 1 引数 $(\lambda z_1z_2.\ldots)$ に行き，その第 2 束縛変数に行けば z_2 にアクセスできる.

例．$N = \lambda w.x(\lambda v.vvy)(\lambda t.t(\lambda uz.xz))$ とおくと，$x \rightsquigarrow x$ と $x \rightsquigarrow v$ が成り立つ．また，$x \rightsquigarrow t$ と $t \rightsquigarrow z$ が成り立つので，$x \rightsquigarrow z$ が成り立つ.

定義 3.3 M 中の変数出現の組 $\boxed{x}$, $\boxed{y}$ が隣接しているとは，M が $\boxed{x}\vec{N}(\lambda\vec{z}.\boxed{y}\vec{L})$ の形の部分項をもつこと.

M 中の二つの置換パス $x_1 \rightsquigarrow x_2$ と $y_1 \rightsquigarrow y_2$ が隣接置換パスであるとは，x_2 と y_2 が M 中で隣接していることと定める．M の自由変数の集合 V に関して，$x_1, y_1 \in V$ であるとき, $x_1 \rightsquigarrow x_2$ と $y_1 \rightsquigarrow y_2$ を V から始まる隣接置換パスとよぶ.

例．$M = \lambda w.x(\lambda v.vvy)(\lambda t.t(\lambda uz.xz))$ とおくと，v と y は M 中で隣接しているので，$x \rightsquigarrow v$ と $y \rightsquigarrow y$ は隣接置換パスである．v の第 1 変数出現と第 2 変数出現は M 中で隣接しているので，$x \rightsquigarrow v$ と $x \rightsquigarrow v$ は隣接置換パスである．M の他の隣接置換パスは次. $x \rightsquigarrow x$ と $x \rightsquigarrow v$;　$x \rightsquigarrow x$ と $x \rightsquigarrow t$;　$x \rightsquigarrow t$ と $x \rightsquigarrow x$;　$x \rightsquigarrow x$ と $x \rightsquigarrow z$.

隣接置換パスは，永続弱正規化可能性の共通型による特徴付けのため，[2] に提案された．そこでは次の性質が証明されている.

補題 3.4 (Dezani et al [2]) 正規形 M が x から始まる隣接置換パスをもてば，弱正規化可能な項 X が存在して，$M[x := X]$ は弱正規化可能でない.

このことからすぐに隣接置換パス不存在に関する次の十分条件が得られる.

補題 3.5 任意の i, j, 任意の弱正規化可能な項 X に関して $M[x_i := X, x_j := X]$ が弱正規化可能なら，M は $x_1, \ldots, x_n$ から始まる隣接置換パスをもたない.

証明．M が x_i, x_j から始まる隣接置換パスをもつと仮定する．ここで $i = j$ であるかも知れない. $M' = M[x_i := y, x_j := y]$ とおくと，M' は y から始まる隣接置換パスをもつ．補題 3.4 より，弱正規化可能項 X が存在して $M'[y := X]$ は弱正規化可能でない．ゆえに，$M[x_i := X, x_j := X]$ は弱正規化可能でない．□

次の主補題は補題 3.5 のおよそ逆が成り立つことを示している.

補題 3.6 (主補題) M を正規形とする．M が $x_1, \ldots, x_n$ から始まる隣接置換パスをもたないならば，任意の弱正規化可能な項 $X_1, \ldots, X_n$ に対して $M[x_1 := X_1, \ldots, x_n := X_n]$ が弱正規化可能.

証明は，M に関する帰納法により，M の形と隣接置換パスの条件からいくつか場合分けし，途中では隣接置換パスを用いた永続弱正規化可能性の十分条件も用いるが，ここでは省略する.

定理 3.1 の証明．β 簡約は弱正規化可能性を保つため，M が正規形としてよい．補題 3.5 より，M は $x_1, \ldots, x_n$ から始まる隣接置換パスをもたない．補題 3.6 より，任意の弱正規化可能な項 $X_1, \ldots, X_n$ に対して $M[x_1 := X_1, \ldots, x_n := X_n]$ は弱正規化可能である．□.

4 Klop 計算と代入定理

代入定理の証明では，強正規化可能性は β 簡約で保存されないため，M が正規形と仮定することができず，このため Klop 計算を用いる必要がある．

Klop 計算とは，λ 計算を拡張して β 簡約によって引数が消滅しないようにした計算体系である．例えば，$(\lambda x.y)\Delta$ は β 簡約すると $\lambda x.y$ となり引数 Δ が消滅する．Klop 計算では，新しい構成子 $[M,N]$ を用い，第 1 引数 M を本来の項の意味を表すために用い，第 2 引数 N を消滅するはずの引数を保存しておく場所として用いる．例えば，$(\lambda x.y)\Delta$ は $[\lambda x.y,\Delta]$ に簡約され，引数 Δ は消滅しない．このしくみにより，Klop 計算では，強正規化可能性と弱正規化可能性は同等になる．Klop 計算を用いることにより，強正規化可能性に対する代入定理の証明を，弱正規化可能性に対する代入定理の証明のアイデアに帰着することができる．いくつかの Klop 計算の計算体系があるが，ここでは Boudol の定義による計算体系 λ^* を用いる [1].

項 $S ::= x|\lambda x.S|SS|[S,S]$

S,T,U,V,P,Q,R,K,X,Y で項を，Λ^* で項全体を表す．$[S,T_1,\dots,T_n]$ と $[S,\overrightarrow{T}]$ は，$[\dots[[S,T_1],T_2],\dots,T_n]$ を表す．

κ 簡約は次の合同閉包として定義される．

$$[\lambda x.S,U_1,\dots,U_n]T \to_\kappa [S[x:=T],U_1,\dots,U_n]$$
$$(x\in FV(S) \text{ のとき})$$
$$[\lambda x.S,U_1,\dots,U_n]T \to_\kappa [S,U_1,\dots,U_n,T]$$
$$(x\notin FV(S) \text{ のとき})$$

ここで $FV(M)$ は M の自由変数全体を表す．

$\to_\kappa^*$ は $\to_\kappa$ の反射推移閉包である．

例えば，$(\lambda x.(\lambda yz.z)(xx)z)\Delta \to_\kappa (\lambda x.[\lambda z.z,xx]z)\Delta \to_\kappa (\lambda x.[z,xx])\Delta \to_\kappa [z,\Delta\Delta]$.

κ 簡約に関する強正規化可能な項全体を SN^*，弱正規化可能な項全体を WN^* で表す．S が κ-正規形とは，$S\to_\kappa T$ となる T がないことと定める．

定理 4.1 (Boudol [1]) *(1)* $\mathsf{SN}^* = \mathsf{WN}^*$.
(2) $\mathsf{SN} \supseteq \mathsf{SN}^*\cap\Lambda$.

定理 4.1 (2) の逆が次のように示せる．合わせると，$\mathsf{SN} = \mathsf{SN}^*\cap\Lambda$ が得られ，λ^* 計算は強正規化可能性に関して λ 計算の保守的拡大となっていることがわかる．

定理 4.2 $\mathsf{SN}\subseteq\mathsf{SN}^*$.

証明は，$(|M|,M)$ に関する帰納法による．

次の略記法を用いる．$S\widetilde{T}$ により $[S,T]$ を表す．$S\overline{T}$ により項 ST または項 $[S,T]$ を表す．$\lambda_{\overrightarrow{T}}\overrightarrow{x}.S$ により項 $[\lambda\overrightarrow{x}.S,\overrightarrow{T}]$ を表す．$(x\overrightarrow{\overline{S}})^\circ$ により次のように定義される項の列を表す．

$$(x)^\circ = \epsilon$$
$$(x\overrightarrow{\overline{S}}T)^\circ = (\overrightarrow{\overline{S}})^\circ,T$$
$$(x\overrightarrow{\overline{S}}\widetilde{T})^\circ = (\overrightarrow{\overline{S}})^\circ.$$

例えば，$(xS_1S_2\widetilde{S_3}S_4)^\circ = ([xS_1S_2,S_3]S_4)^\circ = S_1,S_2,S_4$.

κ-正規形全体は，次で定義される K 全体と一致する．

$$K ::= \overrightarrow{\overline{\lambda_{\overrightarrow{K}}\overrightarrow{x}}}.x\overrightarrow{\overline{K}}$$

この構文的特徴付けを用いて，λ 項の場合と同様にして λ^* 項に隣接置換パスを定義することができる．

定義 4.3 *(1)* x が S 中自由なとき，$\pi(x,K)=x$.
(2) $\pi(x,K) = y\alpha\langle i,j\rangle$. ただし，$K = C[z\overrightarrow{\overline{S}}(\overrightarrow{\overline{\lambda_{\vec{T}}\overrightarrow{t}}}.\lambda_{\vec{U}}x.L)]$，$C[\ ]$ は文脈，x は L 中自由，$\pi(z,C[z]) = y\alpha$, $lh((z\overrightarrow{\overline{S}})^\circ) = i-1$, $lh(\overrightarrow{t}) = j-1$.

弱正規化可能性の場合と同様にして，次の二つの補題が成り立つ．

補題 4.4 S が κ-正規形とする．任意の β -正規形 X に対して $S[x:=X,y=X]\in\mathsf{SN}^*$ であれば，S は x,y から始まる隣接置換パスをもたない．

補題 4.5 (主補題) S が κ-正規形とする．S が $x_1,\dots,x_n$ からはじまる隣接置換パスをもたないなら，任意の $X_1,\dots,X_n\in\mathsf{SN}^*$ に対して $S[\overrightarrow{x}:=\overrightarrow{X}]\in\mathsf{SN}^*$ が成り立つ．

定理 2.1 の証明. κ-正規形 K が存在して，$M\to_\kappa^* K$ となる．定理 4.2 より，任意の i,j, 任意の β -正規形 X に対して，$K[x_i:=X,x_j:=X]\in\mathsf{SN}^*$ である．補題 4.4 より，K は $x_1,\dots,x_n$ から始まる隣接置換パスをもたない．補題 4.5 より，任意の $X_1,\dots,X_n\in\mathsf{SN}^*$ に対して $K[x_1:=X_1,\dots,x_n:=X_n]\in\mathsf{SN}^*$．定理 4.1 (1) より $M[x_1:=X_1,\dots,x_n:=X_n]\in\mathsf{SN}^*$．定理 4.1 (2) より，任意の強正規化可能な $X_1,\dots,X_n$ に対して $M[x_1:=X_1,\dots,x_n:=X_n]$ は強正規化可能. □

任意の強正規化可能項 $X_1,\dots,X_n$ に対して $M[x_1:=X_1,\dots,x_n:=X_n]$ が強正規化可能である

とき，M が $x_1,\ldots,x_n$ に関して代入強正規化可能であるという．任意の弱正規化可能項 $X_1,\ldots,X_n$ に対して $M[x_1 := X_1,\ldots,x_n := X_n]$ が弱正規化可能であるとき，M が $x_1,\ldots,x_n$ に関して代入弱正規化可能であるという．

補題 3.5,3.6,4.4,4.5 よりただちに次の代入正規化可能性に関する特徴付けが得られる．

定理 4.6 (代入正規化可能性の特徴付け) M を正規形とする．次は同等である．

(1) M が $x_1,\ldots,x_n$ に関して代入強正規化可能．

(2) M が $x_1,\ldots,x_n$ に関して代入弱正規化可能．

(3) M は $x_1,\ldots,x_n$ から始まる隣接置換パスをもたない．

隣接置換パスの存在は構文的にチェックでき決定可能なので，この特徴付けから次の決定可能性定理が得られる．

定理 4.7 (代入正規化可能性の決定可能性) M を正規形とする．

(1) M が $x_1,\ldots,x_n$ に関して代入強正規化可能であるかどうかは決定可能である．

(2) M が $x_1,\ldots,x_n$ に関して代入弱正規化可能であるかどうかは決定可能である．

5 永続強正規化可能性の帰納的定義

λ 項の集合 SN_n を，任意の n 個の強正規化可能な項 $X_1,\ldots,X_n$ に対して $MX_1\ldots X_n$ が強正規化可能となる項 M からなる集合と定める．

PSN により，永続強正規化可能な項全体を表す．SN により，強正規化可能な項全体を表す．

次のように集合 $\mathsf{PSN}^\sharp$ と $\mathsf{SN}^\sharp_n$ を帰納的に定義する．これらは，PSN と SN_n に一致することが示せる．

$$\frac{\lambda\overrightarrow{x}.N \in \mathsf{SN}^\sharp_n\ (\forall N \in \overrightarrow{N}) \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = n \quad y \notin \overrightarrow{x}}{\lambda\overrightarrow{x}.y\overrightarrow{N} \in \mathsf{PSN}^\sharp}$$

$$\frac{\lambda\overrightarrow{x}.M[y := N]\overrightarrow{L} \in \mathsf{PSN}^\sharp \quad \lambda\overrightarrow{x}.N \in \mathsf{SN}^\sharp_n \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = n}{\lambda\overrightarrow{x}.(\lambda y.M)N\overrightarrow{L} \in \mathsf{PSN}^\sharp}$$

$$\frac{\lambda\overrightarrow{x}.N \in \mathsf{PSN}^\sharp\ (\forall N \in \overrightarrow{N}) \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = n \quad x \in \overrightarrow{x}}{\lambda\overrightarrow{x}.x\overrightarrow{N} \in \mathsf{SN}^\sharp_n}$$

$$\frac{\lambda\overrightarrow{x}.N \in \mathsf{SN}^\sharp_m\ (\forall N \in \overrightarrow{N}) \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = m \quad y \notin \overrightarrow{x}}{\lambda\overrightarrow{x}.y\overrightarrow{N} \in \mathsf{SN}^\sharp_n}$$

$$\frac{\lambda\overrightarrow{x}.N \in \mathsf{SN}^\sharp_n \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = n \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{y}) > 0}{\lambda\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}.N \in \mathsf{SN}^\sharp_n}$$

$$\frac{\lambda\overrightarrow{x}.M[y := N]\overrightarrow{L} \in \mathsf{SN}^\sharp_n \quad \lambda\overrightarrow{x}.N \in \mathsf{SN}^\sharp_m \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = m}{\lambda\overrightarrow{x}.(\lambda y.M)N\overrightarrow{L} \in \mathsf{SN}^\sharp_n}$$

定理 5.1 (帰納的定義の完全性と健全性)
$\mathsf{PSN} = \mathsf{PSN}^\sharp$ かつ $\mathsf{SN}_n = \mathsf{SN}^\sharp_n$．

定理の証明の鍵は次の補題であり，ここに代入定理が使われる．

補題 5.2 $x \in \overrightarrow{x}$ かつ $\mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = n$ とする．$\lambda\overrightarrow{x}.x\vec{N} \in \mathsf{SN}_n$ ならば $\lambda\overrightarrow{x}.N_i \in \mathsf{PSN}$ $(N_i \in \vec{N})$ である．

証明．$\overrightarrow{X} \in \mathsf{SN}$ を仮定する．$(x\overrightarrow{N})[\overrightarrow{x} := \overrightarrow{X}] \in \mathsf{SN}$ である．$\mathrm{lh}(\overrightarrow{N}) = m$ で $y \notin x\overrightarrow{N}$ と仮定する．定理 2.1(代入定理) より，任意の $\overrightarrow{X}, Y \in \mathsf{SN}$ に対して，$(y\overrightarrow{N})[\overrightarrow{x} := \overrightarrow{X}, y := Y] \in \mathsf{SN}$ が成り立つ．N_i $(1 \le i \le m)$ について，任意の $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z} \in \mathsf{SN}$ に対して $(\lambda\overrightarrow{x}.N_i)\overrightarrow{X}\,\overrightarrow{Z} \in \mathsf{SN}$ を示す．Y を $\lambda\overrightarrow{z}.z_i\overrightarrow{Z}$ とおき $\mathrm{lh}(\overrightarrow{z}) = m$ とおく．すると，$(y\overrightarrow{N})[\overrightarrow{x} := \overrightarrow{X}, y := Y] = (\lambda\overrightarrow{z}.z_i\overrightarrow{Z})\overrightarrow{N}[\overrightarrow{x} := \overrightarrow{X}] \to^*_\beta N_i[\overrightarrow{x} := \overrightarrow{X}]\overrightarrow{Z}$．ゆえに $N_i[\overrightarrow{x} := \overrightarrow{X}]\overrightarrow{Z} \in \mathsf{SN}$．ゆえに $(\lambda\overrightarrow{x}.N_i)\overrightarrow{X}\,\overrightarrow{Z} \in \mathsf{SN}$．したがって $\lambda\overrightarrow{x}.N_i \in \mathsf{PSN}$．□

定理 5.1 の証明．まず $\mathsf{PSN} \supseteq \mathsf{PSN}^\sharp$ かつ $\mathsf{SN}_n \supseteq \mathsf{SN}^\sharp_n$ が証明図に関する帰納法で証明される．次に「$M \in \mathsf{PSN}$ ならば $M \in \mathsf{PSN}^\sharp$」と「$M \in \mathsf{SN}_n$ ならば $M \in \mathsf{SN}^\sharp_n$」が，$(|M|, M)$ に関する帰納法で証明される．もっとも難しい場合は M が次の規則の結論にマッチする場合である．

$$\frac{\lambda\overrightarrow{x}.N \in \mathsf{PSN}^\sharp\ (\forall N \in \overrightarrow{N}) \quad \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) = n \quad x \in \overrightarrow{x}}{\lambda\overrightarrow{x}.x\overrightarrow{N} \in \mathsf{SN}^\sharp_n}$$

この場合は，$\lambda\overrightarrow{x}.xN_1\ldots N_m \in \mathsf{SN}_n$ ならば $\lambda\overrightarrow{x}.N_i \in \mathsf{PSN}$ であることを示す必要がある．これは補題 5.2 により証明される．□

6 永続強正規化可能性の特徴付け

型理論 $\mathcal{HL}$ は [3] が定義した．これは，型変数はもたず，型は二つの型定数 ω, φ から $\rightarrow$ と $\cap$ から構成される共通型型理論である．ω は最小の型，φ は最大の型を表す．型は次のように定義される．

型 $\tau ::= \varphi | \omega | \tau \rightarrow \tau | \tau \cap \tau$

型に関する前順序 $\leq$ は次のように定義される．

$$\sigma \leq \sigma \cap \sigma \qquad \sigma \cap \tau \leq \sigma \qquad \sigma \cap \tau \leq \tau$$

$$\sigma \leq \sigma',\ \tau \leq \tau' \Rightarrow \sigma \cap \sigma' \leq \tau \cap \tau'$$

$$\sigma' \leq \sigma,\ \tau \leq \tau' \Rightarrow \sigma \rightarrow \tau \leq \sigma' \rightarrow \tau'$$

$$(\sigma \rightarrow \tau) \cap (\sigma \rightarrow \zeta) \leq \sigma \rightarrow \tau \cap \zeta$$

$$\varphi \sim \omega \rightarrow \varphi \qquad \omega \sim \varphi \rightarrow \omega \qquad \omega \leq \varphi$$

$$\sigma \leq \sigma \qquad \sigma \leq \tau,\ \tau \leq \zeta\ \Rightarrow \sigma \leq \zeta$$

$\tau \sim \sigma$ により $\tau \leq \sigma$ かつ $\sigma \leq \tau$ を表す．

$\mathcal{HL}$ の型付け規則は次のように定義される．

$$\frac{(x\!:\!\sigma) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x\!:\!\sigma}\ (\mathrm{Ax}) \qquad \frac{\Gamma, x\!:\!\sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau}\ (\rightarrow \mathrm{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}\ (\rightarrow \mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \sigma \leq \tau}{\Gamma \vdash M : \tau}\ (\leq)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau}\ (\cap \mathrm{I})$$

定理 2.2 の証明．(1)(2) の右辺から左辺は，[3] になされている．(1)(2) の左辺から右辺を示す．$M \in \mathsf{SN}$ または $M \in \mathsf{PSN}$ と仮定する．$\Gamma_\omega \vdash M : \varphi$ または $\Gamma_\omega \vdash M\!:\!\omega$ を示せばよい．第 5 節の帰納的定義を用いる．定理 5.1 より，$M \in \mathsf{SN}_0^\sharp$ または $M \in \mathsf{PSN}^\sharp$ が成り立つ．$M \in \mathsf{SN}_0^\sharp$ または $M \in \mathsf{PSN}^\sharp$ の証明に関する帰納法で $\Gamma_\omega \vdash M\!:\!\varphi$ または $\Gamma_\omega \vdash M\!:\!\omega$ を示すことができる．□

謝辞

代入正規化可能性についてご指摘いただき, INRIA の Benjamin Werner 博士に感謝します．また，議論や助言をいただき, Henk Barendregt 教授, Flavio Corradini 教授, Jan Willem Klop 教授, 亀山幸義 筑波大学助教授，金沢 誠 国立情報学研究所助教授に感謝します．

参考文献

[1] G. Boudol, On Strong Normalization in the Intersection Type Discipline. In *Proc. TLCA'03, LNCS 2701,* 2003, pp. 60–74.

[2] M. Dezani-Ciancaglini and F. Honsell and Y. Motohama, Compositional Characterization of λ-terms using Intersection Types. *Theoretical Computer Science* 340 (3) (2005) 459–495.

[3] F. Honsell and M. Lenisa, Semantical Analysis of Perpetual Strategies in λ-calculus. *Theoretical Computer Science* 212 (1-2) (1999) 183–209.

[4] R. Matthes, Non-Strictly Positive Fixed-Points for Classical Natural Deduction. *Annals of Pure and Applied Logic* 133 (2005) 205–230.

[5] M. Tatsuta and M. Dezani-Ciancaglini, Normalisation is Insensible to lambda-term Identity or Difference. In *Proc. LICS'06,* 2006, to appear.