左線形項書換えシステムの合流性

Confluence of Left-Linear Term Rewriting Systems

岩見 宗弘 †

Munehiro IWAMI

† 島根大学 総合理工学部

Faculty of Science and Engineering, Shimane University

munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

Huet は, 左線形かつ並行閉包な項書換えシステム (TRS) は合流性を持つことを示した. 外山は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した. さらに, 大山口らは, Huet と外山の結果を一般化した K-閉包の概念を導入し, 左線形かつ K-閉包な TRS は, 合流性を持つことを示している.

本稿では, K-開発閉包の概念を導入し, 大山口らの結果を拡張する. すなわち, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す. さらに, 本結果の有用性を示すために例を与える.

1 はじめに

項書換えシステム (TRS) は, 等式による柔軟な計算と効率的な推論を与えることができる体系である. TRS は, 関数・論理型プログラミング言語の計算モデルや定理自動証明システムの基礎, 記号処理, 代数的仕様記述, 検証等に広く応用されている [6].

TRS の合流性は, 与えられた項の最も単純な形 (正規形) が一意であることを保証する. 合流性は, TRS の最も重要な性質の一つである. しかしながら, TRS の合流性は一般には決定不能であることが知られており, 合流性を示すために多くの十分条件が与えられている.

Huet は, 左線形かつ並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [1]. 外山は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [7]. van Oostrom は, Huet と外山の結果を, 開発閉包の概念を導入し, 高階項書換えシステム (HRS) へ拡張した [3], すなわち, 左線形かつ開発閉包な HRS は, 合流性を持つことを示した. 大山口らは, Huet と外山の結果を一般化した K-閉包の概念を導入し, 左線形かつ K-閉包な TRS は, 合流性を持つことを示した [4].

本稿では, K-開発閉包の概念を導入し, 大山口らの結果を拡張する, すなわち, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す. さらに, 本結果の有用性を示すために, 例を与える.

2 節では, 本稿で使用する定義や概念を与える. 3 節では, K-開発閉包の定義を与える. 4 節では, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す. 最後に, 5 節において, 本結果の有用性を示すために例を与える.

2 準備

本節では，本稿で使用する定義と概念のみ述べる．定義と概念は文献 [4] に準ずる．項書換えシステムの詳細は，文献 [6] で述べられている．

記号 ϵ は空列を表し，$\emptyset$ は空集合を表す．V は変数の集合，F は項関数 $arity : F \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ を持つ関数記号の集合とする．T は V と F から生成される項の集合とする．

項 M に対して，$Pos(M)$ は M の出現の集合を表す．$Pos_F(M)$ は項 M における関数記号の出現の集合を表し，M/u は出現 u の M の部分項を表し，$M[u \leftarrow N]$ は部分項 M/u を項 N により置き換えることにより得られる項を表す．$V(M)$ は項 M に出現する変数の集合とする．$|M|$ は項 M のサイズを表す．$U/v = \{i \mid v \cdot i \in U\}$ かつ $Min(U) = \{u \in U \mid \forall v \in U. v \not< u\}$. 項 M における任意の変数の出現が 1 より大きくないとき線形であるという．書換え規則 $l \to r$ は，項上の方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：$l \notin V$ かつ $V(r) \subseteq V(l)$. 書換え規則 $l \to r$ に対して，l が線形であるとき，左線形であるという.

項書換えシステム (TRS) は，書換え規則の有限

集合である．任意の書換え規則が左線形であるとき，TRS R が左線形であるという．項 M が出現 u において N に書換えられるとは, ある代入 σ と書換え規則 $l{\to}r$ が存在し, $M = M[u \leftarrow l\sigma]$ かつ $N = M[u \leftarrow r\sigma]$ を満たすときをいう. このとき, M/u をこの書換えのリデックスといい、u をリデックス出現という. この書換えを $M{\to}^u_R N$ で表し, u-書換えと呼ぶ. 記号 u, R は省略することができる, すなわち, $M{\to}N$ と表せる. $\to$ は T 上の関係であるとみなす. $\to^*$ は $\to$ の反射推移的閉包とする. $M{\to}N$ ならば $N{\to}M$ である. 同様に $\leftarrow^*$ を使う. $\leftrightarrow$ は $\to \cup \leftarrow$ とする. $F(R)$ は, TRS R に出現する関数記号の集合とする.

TRS R が合流性を持つとは, $\leftarrow^* \cdot{\to}^* \subseteq {\to}^* {\cdot} \leftarrow^*$ が成り立つときをいう. TRS R が合流性を持つ $\Longleftrightarrow$ TRS R が **Church-Rosser** 性を持つ **(CR)**，すなわち，$\leftrightarrow^* \subseteq {\to}^* {\cdot} \leftarrow^*$ [1].

定義 2.1 *([4])* $\gamma : M_0 \to^{u_0}_R M_1 \to^{u_0}_R \ldots \to^{u_{n-1}}_R M_n$ を書換え列とする. このとき, $\mathcal{R}(\gamma) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, すなわち, γ のリデックス出現の集合とする. $\mathcal{R}$ が互いに素ならば, γ は並行書換えであるといい, $M \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}^{\mathcal{R}(\gamma)}_R M_n$ により表す. 記号 $\mathcal{R}(\gamma)$ と R は省略することができ, $\mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}^*$ と $\mathrel{\leftarrow\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!+}$ も $\to$ の場合と同様である. $\mathcal{R}(\gamma) = \emptyset$ のときは, $M \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}^{\emptyset}_R M$ が成り立つ.

定義 2.2 *([4]) TRS* R_1 と R_2 の書換え規則から得られる危険対の集合 $CP(R_1, R_2)$ を次のように定義する：

$CP(R_1, R_2) = \{\langle\ \theta(l_1)[u \leftarrow \theta(r_2)],\ \theta(r_1)\ \rangle_u \mid l_1 \to r_1 \in R_1,\ l_2 \to r_2 \in R_2,\ u \in Pos_F(l_1),\ l_1 \to r_1 \neq l_2{\to}r_2,\ \theta(l_1/u) = \theta(l_2)\}$.

ここで, $V(l_1) \cap V(l_2) = \emptyset$ かつ θ は l_1/u と l_2 の最汎単一子である. $R_1 \neq R_2$ のとき, $CP(R_1, R_2)$ と $CP(R_2, R_1)$ は一般的に同じである必要はない. $CP(R)$ は $CP(R, R)$ で定義される危険対の集合である. $P = Q$ のとき, 危険対 $\langle P, Q\rangle$ が自明であるという.

$\gamma : L = \sigma(r) \leftarrow^{\epsilon}_{R_2} M = \sigma(l) \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}^{U}_{R_1} N$ ($l{\to}r \in R_2$, σ:代入). $U \cap Pos_F(l) = \emptyset$ ならば, γ は重なりがないという. R_1 かつ R_2 が左線形かつ γ が重なりがないならば, $L \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}_{R_1} \cdot \leftarrow^{\epsilon}_{R_2} N$ が成り立つ [1].

Huet は，並行閉包の概念を提案し，左線形かつ並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した．

定義 2.3 ([1]) $\forall\langle P, Q\rangle \in CP(R)$ に対して, $P \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}_R Q$ のとき, *TRS* R を並行閉包であるという.

定理 2.4 *([1])* 任意の左線形かつ並行閉包である *TRS* R は，合流性を持つ．

任意の危険対 $\langle P, Q\rangle_\epsilon$(外側危険対と呼ぶ) に対して, 並行閉包条件 $P \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to} Q$ をある L に対して $P \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to} L \leftarrow^* Q$ に緩和することができる. この緩和並行閉包条件で任意の左線形 TRS が合流性を持つことが保証される [7].

大山口らは, この緩和並行閉包条件を一般化した **K-**閉包の条件を次のように与えた.

定義 2.5 ([4]) 次の条件を満たすとき，左線形 *TRS* R は K-閉包である．

1. $K \subseteq R$ かつ K は合流性を持つ．
2. $\forall\langle P, Q\rangle_u \in CP(K, R-K)(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}_K Q$.
3. $\forall\langle P, Q\rangle_u \in CP(R-K, R)(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}_{R-K} \cdot \to^*_K \cdot \leftarrow^*_K Q$.
4. $\forall\langle P, Q\rangle_\epsilon \in CP(K, R-K)$ に対して，$P \to^*_K \cdot \leftarrow^*_K \cdot \mathrel{\leftarrow\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!+}_{R-K} Q$.
5. $\forall\langle P, Q\rangle_\epsilon \in CP(R-K, R-K)$ に対して，$P \to^*_K \cdot \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to}_{R-K} \cdot \to^*_K \cdot \leftarrow^*_R Q$.

定理 2.6 ([4]) 任意の左線形かつ K-閉包である *TRS* R は，合流性を持つ．

定義 2.7 ([6]) *TRS* R に対して，同時書換え $\mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}_R$ を次のように帰納的に定義する．

1. x を変数とする．このとき，$x \mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}_R x$.
2. f を項数 n の関数記号とする．$s_i \mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}_R t_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ならば，$f(s_1, \ldots, s_n) \mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}_R f(t_1, \ldots, t_n)$.
3. $l{\to}r \in R$ とする．$\sigma \mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}_R \tau$ を満たす代入 σ, τ，すなわち，任意の変数 x に対して $\sigma(x){\to}_R\tau(x)$ に対して，$l\sigma \mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}_R r\tau$.

補題 2.8 ([6])

1. 同時書換え $\mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}$は, 反射的である．
2. $\to \subseteq \mathrel{+\!\!\!\mid\!\!\!\mid\!\!\!\to} \subseteq \mathrel{-\!\!\circ\!\!\to} \subseteq \to^*$.

van Oostrom は，TRS よりも一般的な体系である高階項書換えシステム **(HRS)** において開発閉包の概念を導入し，左線形かつ開発閉包な HRS は合流性を持つことを示した [3]．

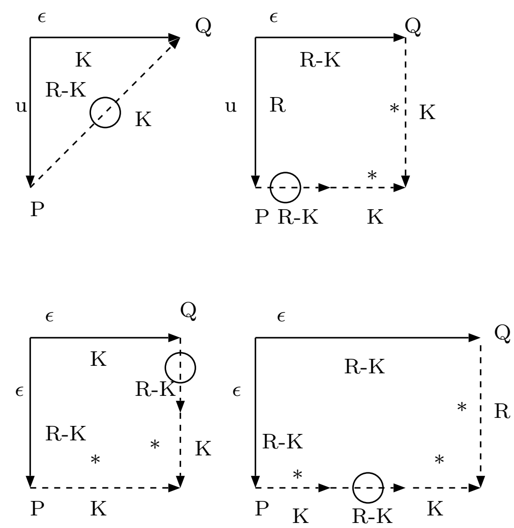

図 1: K-開発閉包

定義 2.9 *([3])* $\forall\langle P,Q\rangle \in CP(R)$ に対して，$P \mathrel{\circ\!\!\rightarrow} Q$ ならば，*TRS* R が開発閉包であるという．

TRS は，HRS の特別なクラスであり，次の定理が成り立つ．

定理 2.10 *([3])* 任意の左線形かつ開発閉包である *TRS* R は，合流性を持つ．

3 K-開発閉包

本節では，左線形 TRS に対して，開発閉包と K-閉包の条件を一般化した K-開発閉包の条件を与える．K-開発閉包は，K-閉包の定義中の並行書換えをすべて同時書換えで置き換えたものである．$\emptyset$-開発閉包の条件は，開発閉包と一致する．ここで，K は書換え規則の集合とする．

定義 3.1 次の条件を満たすとき，左線形 *TRS* R は K-開発閉包である *(*図 *1)*．

1. $K \subseteq R$ かつ K は合流性を持つ．
2. $\forall\langle P,Q\rangle_u \in CP(K,R-K)(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_K Q$.
3. $\forall\langle P,Q\rangle_u \in CP(R-K,R)(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_K Q$.
4. $\forall\langle P,Q\rangle_\epsilon \in CP(K,R-K)$ に対して，$P \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_K \cdot \leftarrow\!\!\circ_{R-K}\, Q$.

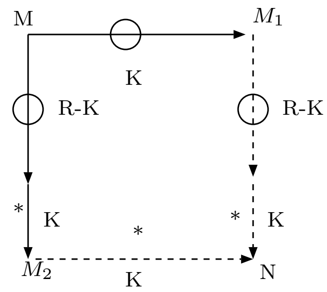

図 2: 補題 4.2

5. $\forall\langle P,Q\rangle_\epsilon \in CP(R-K,R-K)$ に対して，$P \rightarrow^*_K \cdot \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_R Q$.

したがって，以下では TRS R は，左線形かつ K-開発閉包であると仮定する．

4 左線形項書換えシステムの合流性

本節では，任意の左線形かつ K-開発閉包である TRS は合流性を持つことを証明する．次の重みに関する帰納法により示す．

定義 4.1 ([1]) $\gamma : L \leftarrow\!\!\circ^U M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^V N$ とする．このとき，γ の重みを次のように定義する．

$weight(\gamma) = \sum_{w \in W} \mid M/w \mid.$

$(W = \{u \in U \mid \exists v \in V. v \leq u\} \cup \{v \in V \mid \exists u \in U. u < v\})$. $W = \emptyset$ のとき，$weight(\gamma) = 0$.

任意の $u \in U$ かつ $V \subseteq Pos(M[u \leftarrow N/u])$ に対して，$weight(L \leftarrow^\epsilon M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^U N) > weight(L' \leftarrow\!\!\circ^V M[u \leftarrow N/u] \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^{U-\{u\}} N)$ が成り立つ．

補題 4.2 $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_K M_1$ かつ $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow^*_K M_2$ とする．このとき，$M_1 \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow^*_K N$ かつ $M_2 \rightarrow^*_K N$ を満たす項 N が存在する *(*図 *2)*.

(**証明**) K が合流性を持つことから，$M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} M_2$ の場合のみを考えれば十分である．$\gamma : M_2 \leftarrow\!\!\circ^{U_2}_{R-K} M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^{U_1}_K M_1$ とする．この補題を $weight(\gamma)$ に関する帰納法により示す．

• $weight(\gamma) = 0$ のとき: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ より，$M_2 \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_K \cdot \leftarrow\!\!\circ_{R-K} M_1$ が成り立つ．

• $weight(\gamma) > 0$ のとき: 任意の M, M_1, M_2 に対して，次の性質が成り立つ．

任意の $v \in Min(U_1 \cup U_2)$ に対して，$[M_2/v \leftarrow\!\!\circ^{U_2/v}_{R-K} M/v \rightarrow^{U_1/v}_K M_1/v \Rightarrow M_2/v \rightarrow^*_K N'/v \leftarrow^*_K \cdot \leftarrow\!\!\circ_{R-K}$

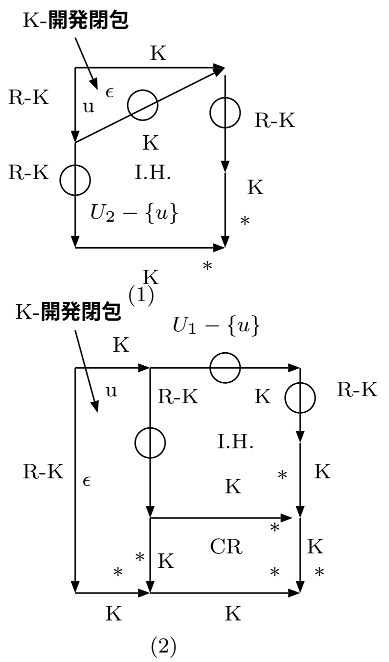

図 3: 補題 4.2 の証明

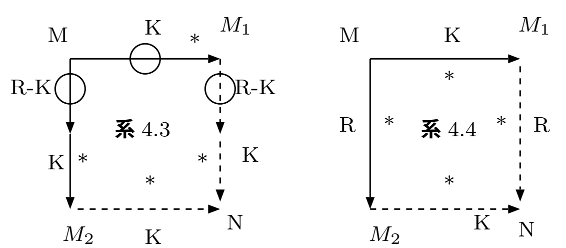

図 4: 系 4.3 と系 4.4

$M_1/v]$ ならば，$[M_2 \mathrel{\leftarrow\!\!\circ}^{U_2}_{R-K} M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^{U_1}_{K} M_1 \Rightarrow M_2 \to^*_K N' \leftarrow^*_K \cdot \mathrel{\leftarrow\!\!\circ}_{R-K} M_1]$.

$weight(\gamma) \geq weight(M_2/v \mathrel{\leftarrow\!\!\circ}^{U_2/v}_{R-K} M/v \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^{U_1/V}_{K} M_1/v)$ より，$U_1 = \{\epsilon\}$ 又は $U_2 = \{\epsilon\}$ の場合を示せば十分である．次の 3 つの場合を考える．(a) $U_1 = \{\epsilon\}$ かつ $U_2 = \{\epsilon\}$，(b) $U_1 = \{\epsilon\}$ かつ $U_2 \neq \{\epsilon\}$，(c) $U_1 \neq \{\epsilon\}$ かつ $U_2 = \{\epsilon\}$.

γ に重なりがないときは，自明である．γ に重なりがあるとき: (a) の場合は, K-開発閉包の条件 4 より，この補題が成り立つ．(b) と (c) の場合は，図 3 の (1) と (2) からそれぞれ成り立つ． □

系 4.3 $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^*_K M_1$ かつ $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \to^*_K M_2$ とする．このとき，$M_1 \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \to^*_K N$ かつ $M_2 \to^*_K N$ を満たす項 N が存在する (図 4).

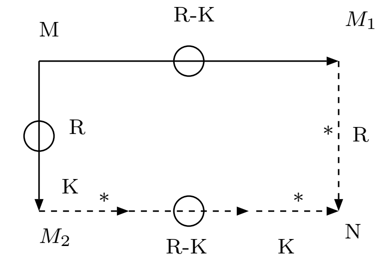

図 5: 補題 4.5

(証明) $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^*_K M_1$ の長さに関する帰納法と補題 4.2 から成り立つ． □

系 4.4 $M \to^*_K M_1$ かつ $M \to^*_R M_2$ とする．このとき，$M_1 \to^*_R N$ かつ $M_2 \to^*_K N$ を満たす項 N が存在する (図 4). すなわち，$\to_K$ と $\to_R$ は可換である．

(証明) 系 4.3 より，$\leftarrow_R \cdot \to^*_K \subseteq \to^*_K \cdot \leftarrow^*_R$ が成り立つ．$\to^*_R$ の長さに関する帰納法より，$\leftarrow^*_R \cdot \to^*_K \subseteq \to^*_K \cdot \leftarrow^*_R$. □

補題 4.5 $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} M_1$ かつ $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_R M_2$ とする．このとき，$M_1 \to^*_R N$ かつ $M_2 \to^*_K \cdot \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \to^*_K N$ を満たす項 N が存在する (図 5).

(証明) $\gamma{:}M_2 \mathrel{\leftarrow\!\!\circ}^{U_2}_{R} M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^{U_1}_{R-K} M_1$ とする．この補題は，$weight(\gamma)$ に関する帰納法により示す．

- $weight(\gamma) = 0$ のとき: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ より，$M_2 \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \mathrel{\leftarrow\!\!\circ}_R M_1$.
- $weight(\gamma) > 0$ のとき: 補題 4.2 と同様の手法により，次の 3 つの場合を示せば十分である．(a) $U_1 = \{\epsilon\}$ かつ $U_2 = \{\epsilon\}$, (b) $U_1 = \{\epsilon\}$ かつ $U_2 \neq \{\epsilon\}$, (c) $U_1 \neq \{\epsilon\}$ かつ $U_2 = \{\epsilon\}$.

γ に重なりがないときは，自明である．γ に重なりがあるとき: (a) の場合は，K-開発閉包の条件 4 と 5 から成り立つ．(b) と (c) の場合は図 6 の (1) と (2) からそれぞれ成り立つ． □

補題 4.6 $M \to^*_K \cdot \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \to^*_K M_1$ かつ $M \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_R M_2$ とする．このとき，$M_1 \to^*_R N$ かつ $M_2 \to^*_K \cdot \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \to^*_K N$ を満たす項 N が存在する (図 7).

(証明) 図 8 より成り立つ． □

定理 4.7 任意の左線形かつ K-開発閉包である TRS R は，合流性を持つ．

(証明) 補題 4.6 から，$\mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^*_R$ の長さに関する帰納法と $\mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_R \subseteq \to^*_K \cdot \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \to^*_K \subseteq \to^*_R = \mathrel{\circ\!\!\rightarrow}^*_R$ より，

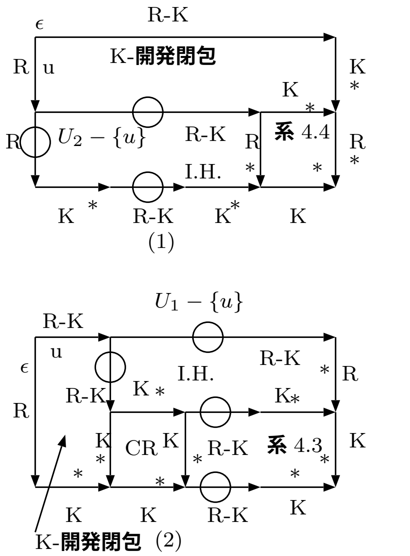

図 6: 補題 4.5 の証明

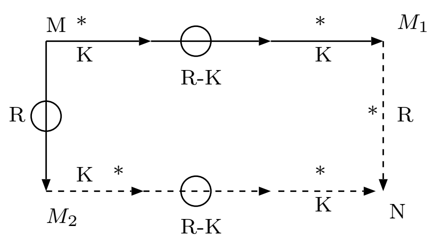

図 7: 補題 4.6

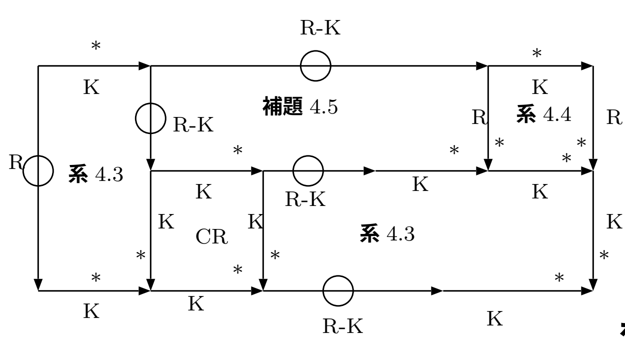

図 8: 補題 4.6 の証明

$\leftarrow\!\circ\!\rightarrow^*_R \cdot \rightarrow^*_K \cdot -\!\circ\!\rightarrow_{R-K} \cdot \rightarrow^*_K \subseteq \rightarrow^*_K \cdot -\!\circ\!\rightarrow_{R-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_R$ が成り立つ．したがって，$\leftarrow^*_R \cdot \rightarrow^*_R \subseteq \rightarrow^*_R \cdot \leftarrow^*_R$ が成り立つ． □

5 応用例

本節では, 定理 4.7 の有用性を示すため, 次のような応用例を与える.

例 5.1 次の *3* つの *TRS* K', $K(\supseteq K')$, $R(\supseteq K)$ を考える．$F=\{+,*,s,pw,ar,0\}$, $V=\{x,y,n\}$ とする. *TRS* R は, *Knuth* の上矢印記号 *[2]* を表し, 巨大な自然数を生成する.

$$xn = \underbrace{x+x+\ldots+x}_{n\text{回}},\ x\uparrow n = \underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{n\text{ 回}},$$

$$x\uparrow\uparrow n = \underbrace{x\uparrow(x\uparrow(\ldots\uparrow x)\ldots)}_{n\text{ 回}}.$$

例えば,

$2\uparrow\uparrow 2 = 2\uparrow 2 = 2^2 = 4,$

$2\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2) = 2^{16} = 65536,$

$$2\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2\uparrow\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow\uparrow 2) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{65536\text{ 回}}.$$

$$K' = \begin{cases} x+(y+z)\rightarrow(x+y)+z \\ (x+y)+z\rightarrow x+(y+z) \\ x+y\rightarrow y+x \end{cases}$$

$$K-K' = \begin{cases} x*0\rightarrow 0 \\ x*s(0)\rightarrow x \\ pw(x,0)\rightarrow s(0) \\ pw(x,s(y))\rightarrow x*pw(x,y) \end{cases}$$

$$R-K = \begin{cases} ar(n,x,0)\rightarrow 0 \\ ar(0,x,y)\rightarrow x*y \\ ar(s(0),x,s(y))\rightarrow x*pw(x,y) \\ ar(n,x,s(0))\rightarrow x \\ ar(s(n),x,s(s(y))) \\ \qquad\rightarrow ar(n,x,ar(s(n),x,s(y))) \end{cases}$$

TRS R の合流性を本研究の結果を適用し示す．

$M\rightarrow_{K'}N \iff N\rightarrow_{K'}M$ より，*TRS* K' は合流性を持つ．*TRS* $K-K'$ は左線形かつ重なりがないので, 合流性を持つ *[5]*．$F(K')\cap F(K-K')=\emptyset$ より, *TRS* K' かつ $K-K'$ が合流性を持つ $\iff$ *TRS* K が合流性を持つ *[8]*. したがって, *TRS* K は, 合流性を持つ.

1. $CP(K, R-K) = CP(R-K, K) = \emptyset$.

2. $CP(R-K, R-K) =$
$\{\langle 0, x*0\rangle_\epsilon, \langle x*0, 0\rangle_\epsilon,$
$\langle x, x*pw(x,0)\rangle_\epsilon, \langle x*pw(x,0), x\rangle_\epsilon,$
$\langle x*s(0), x\rangle_\epsilon, \langle x, x*s(0)\rangle_\epsilon,$
$\langle ar(0,x,ar(s(0),x,s(y))), x*pw(x,s(y))\rangle_\epsilon,$
$\langle x*pw(x,s(y)), ar(0,x,ar(s(0),x,s(y)))\rangle_\epsilon, \}$.

   $\forall\langle P,Q\rangle \in CP(R-K,R-K)$ に対して，$P \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow_R^* Q$ が成り立つ．例えば，

   $ar(0,x,ar(s(0),x,s(y)))(=P)$
   $\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R-K} x*x*pw(x,y)$
   $\leftarrow_K x*pw(x,s(y))(=Q)$.

   よって，R は左線形かつ K-開発閉包である．定理 4.7 から，TRS R は合流性を持つ.

   しかしながら，$P \mathrel{-\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow_R^* Q$ は成り立たないため，TRS R は K-閉包の条件 5 を満たさない, すなわち，

   $ar(0,x,ar(s(0),x,s(y)))(=P)$
   $\not\mathrel{-\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow}_{R-K} x*x*pw(x,y)$
   $\leftarrow_K x*pw(x,s(y))(=Q)$.

   さらに，$P \mathrel{-\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow}_R \cdot \leftarrow_R^* Q$ も成立しないため，TRS R は緩和並行閉包条件 [7] も満たさない．

例 5.2 次の 2 つの TRS K と $R(\supseteq K)$ を考える．$F = \{f, f', f'', g', h, h', I, a, b, c\}$, $V = \{x, y\}$ とする.

$$K = \begin{cases} a \rightarrow b \\ b \rightarrow a \\ a \rightarrow c \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

$$R-K = \begin{cases} f(x,a) \rightarrow f'(h(x),b) \\ f(x,a) \rightarrow g'(I(x),b) \\ h(x) \rightarrow h'(x) \\ I(x) \rightarrow h'(x) \\ f'(x,y) \rightarrow f''(x,y) \\ g'(x,y) \rightarrow f''(x,y) \\ f(x,y) \rightarrow f'(h(x),y) \\ f(x,y) \rightarrow g'(I(x),y) \end{cases}$$

TRS R の合流性を定理 4.7 を適用し示す. $M \rightarrow_K N \iff N \rightarrow_K M$ より, TRS K は合流性を持つ.

1. $CP(K, R-K) = \emptyset$.

2. $CP(R-K, K) =$
$\{\langle f(x,b), f'(h(x),b)\rangle_2,$
$\langle f(x,c), f'(h(x),b)\rangle_2,$
$\langle f(x,b), g'(I(x),b)\rangle_2,$
$\langle f(x,c), g'(I(x),b)\rangle_2\}$.

   $\forall\langle P,Q\rangle \in CP(R-K,K)$ に対して，$P \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* Q$ が成り立つ．例えば,

   $f(x,c)(=P)$
   $\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R-K} f'(h(x),c)$
   $\rightarrow_K f'(h(x),a)$
   $\rightarrow_K f'(h(x),b)(=Q)$.

3. $CP(R-K, R-K) =$
$\{\langle f'(h(x),b), g'(I(x),b)\rangle_\epsilon,$
$\langle g'(I(x),b), f'(h(x),b)\rangle_\epsilon,$
$\langle f'(h(x),b), f'(h(x),a)\rangle_\epsilon,$
$\langle f'(h(x),a), f'(h(x),b)\rangle_\epsilon,$
$\langle f'(h(x),b), g'(I(x),a)\rangle_\epsilon,$
$\langle g'(I(x),a), f'(h(x),b)\rangle_\epsilon,$
$\langle g'(I(x),b), f'(h(x),a)\rangle_\epsilon,$
$\langle f'(h(x),a), g'(I(x),b)\rangle_\epsilon,$
$\langle g'(I(x),b), g'(I(x),a)\rangle_\epsilon,$
$\langle g'(I(x),a), g'(I(x),b)\rangle_\epsilon,$
$\langle f'(h(x),y), g'(I(x),y)\rangle_\epsilon,$
$\langle g'(I(x),y), f'(h(x),y)\rangle_\epsilon\}$.

   $\forall\langle P,Q\rangle \in CP(R-K,R-K)$ に対して，$P \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow_R^* Q$ が成り立つ．例えば,

   $g'(I(x),b)(=P)$
   $\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R-K} f''(h'(x),b)$
   $\rightarrow_K f''(h'(x),a)$
   $\leftarrow_{R-K} f''(h(x),a)$
   $\leftarrow_{R-K} f'(h(x),a)(=Q)$.

   よって，R は左線形かつ K-開発閉包である．定理 4.7 から，TRS R は合流性を持つ.

   しかしながら，$P \mathrel{-\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow}_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow_R^* Q$ は成り立たないため，TRS R は K-閉包の条件 5 を満たさない, すなわち,

   $g'(I(x),b)(=P)$
   $\not\mathrel{-\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow}_{R-K} f''(h'(x),b)$
   $\rightarrow_K f''(h'(x),a)$
   $\leftarrow_{R-K} f''(h(x),a)$
   $\leftarrow_{R-K} f'(h(x),a)(=Q)$.

さらに，$P \mathrel{-\!\!\!\mid\!\mid\!\!\!\rightarrow}_R \cdot \leftarrow^*_R Q$ も成立しないため，TRS R は緩和並行閉包条件 [7] も満たさない．

6 まとめと今後の課題

本稿では, K-開発閉包の概念を導入し, 大山口らの結果を拡張した. すなわち, 左線形かつ K-開発閉包な項書換えシステムは合流性を持つことを示した. さらに, 本結果の有用性を示すために, 例を与えた. 今後の課題は, K-開発閉包の概念を高階項書換えシステムへ導入し, van Oostrom の結果を拡張することである.

謝辞

本研究に対して有益な助言を頂いた外山 芳人先生に感謝致します.

参考文献

[1] G. Huet, “Confluence reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems,” J. ACM, 27, 4, pp.797–821, 1980.

[2] D. E. Knuth, “Mathematics and computer science: coping with finiteness,” Science, 194, 4271, pp.1235–1242, 1976.

[3] V. van Oostrom, “Development closed critical pairs,” Proc. 2nd International Workshop on Higher-Order Algebra, Logic and Term Rewiriting, LNCS, 1024, pp.185-200, 1995.

[4] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, “On the Church-Rosser property of left-linear term rewriting systems,” IEICE Transactions of Information and Systems, E86-D, 1, pp.131–135, 2003.

[5] B. K. Rosen, “Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems,” J. ACM, 20, 1, pp.160–187, 1973.

[6] Terese, “Term rewriting systems,” Cambridge University Press, 2003.

[7] Y. Toyama, “On commutativity of term rewriting systems,” IEICE Transactions of Information and Systems, J66-D, 12, pp.1370–1375, 1983 (in Japanese).

[8] Y. Toyama, “On the Church-Rosser property for the direct sum of term rewriting systems,” J. ACM, 34, 1, pp.128–143, 1987.