条件付き項書換えを定義する線形な項書換え系

Conditional Term Rewriting Defined by Linear Term Rewriting Systems

服部 哲 †

Satoshi HATTORI

† 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST)

satoshi@jaist.ac.jp

条件付き項書換え系 (CTRS) における書換え関係は，条件部を持たない項書換え系 (TRS) を帰納的に構成して定義する．CTRS が線形であっても，書換え関係を定義する TRS は線形ではない．本論文では，線形な TRS で書換え関係が定義できる CTRS の一つのクラスを与える．このクラスの CTRS の性質に関する議論は，その性質の線形な TRS に対する十分条件を用いて行なうことができる．

1 はじめに

項書換え系 (Term Rewritirng System，TRS) に関するさまざまな研究成果が得られている [1, 2, 5]. TRS に対する構文的な制約の一つに左線形性がある．これは，書換え規則の左辺において任意の変数は高々１回しか出現しない，という制約である．関数型プログラムは左線形な TRS のサブクラスとみなせる．関数型プログラムの計算能力は万能であるので，左線形性は妥当な構文的制約である．TRS の諸性質に関する議論は，しばしば左線形性を仮定して行なわれる．

条件付き項書換え系 (Conditional Term Rewriting System，CTRS) における書換え関係は，条件部を持たない項書換え系を帰納的に構成して定義する．CTRS が左線形であっても，書換え関係を定義する TRS は左線形ではない．そこで，本論文では，左線形な TRS で書換え関係が定義できる CTRS の一つのクラスを与える．CTRS から左線形な TRS を帰納的に構成したとき，この TRS と，書換え関係を定義する TRS とが等しい書換え能力を持つようなクラスを与える．このクラスの CTRS の性質に関する議論は，その性質の左線形な TRS に対する十分条件を用いて行なうことができる．本論文では，例として，CTRS の合流性についての考察を行なう．

以下，まず，2 章で TRS や線形性に関する諸概念の定義を行なう．次に，3 章で，CTRS における線形的定義可能性という概念を導入し，CTRS が線形的定義可能となるための構文的な十分条件を与える．また，4 章で，CTRS の合流性などに関する考察を述べる．

2 準備

本章では，用語，記法の定義などを行う．

F を関数記号の集合，V を変数の集合とする．項の集合 $T(F,V)$ を帰納的に定義する．変数 $x \in V$ について，$x \in T(F,V)$ である．$f \in F, t_1,\cdots,t_n \in T(F,V)$ であるとき，$f(t_1,\cdots,t_n) \in T(F,V)$ である．F,V を明示する必要がなければ，$T(F,V)$ を単に T と表す．項 t に含まれる変数の集合を $Var(t)$ と表す．項 t が線形であるとは，t に同一の変数が 2 回以上出現しないことをいう．

文脈 $C[,\cdots,]$ は，空項 $\Box$ によって拡張された項集合の要素である．空項をただ一つ含む文脈を，特に $C[\ ]$ と表す．代入 σ は，V から $T(F,V)$ への写像で，定義域 $Dom(\sigma) = \{x \in V \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものをいう．また，$Codom(\sigma) = \{t \mid x \in Dom(\sigma), t = \sigma(x)\}$ とする．代入を $T(F,V)$ から $T(F,V)$ への写像に拡張する．すなわち，$\sigma(f(t_1,\cdots,t_n)) = f(\sigma(t_1),\cdots,\sigma(t_n))$ とする．$\sigma\sigma'(t) = \sigma'(\sigma(t))$ と定義する．$\sigma(t)$ は $t\sigma$ とも表す．代入 σ，変数の集合 $V' \subseteq V$ に対し，σ の V' への制限 $\sigma|_{V'}$ を次のように定義する．

- $x \in V'$ ならば，$\sigma|_{V'}(x) = \sigma(x)$.
- $x \notin V'$ ならば，$\sigma|_{V'}(x) = x$.

書換え規則は，$l \to r$ の形で表される．ここで，$l, r \in T, l \notin V, Var(l) \supseteq Var(r)$ である．項書換え系 (TRS) は書換え規則の集合である．TRS R 上の書換え関係 $\to_R$ を次のように定義する．項 s,t に対して $s \to_R t$ となるのは，書換え規則 $l \to r \in R$，代入 σ,

文脈 $C[\,]$ が存在して，$s = C[l\sigma], t = C[r\sigma]$ となるとき，かつ，そのときに限る．R を明示する必要がなければ，$s \to_R t$ を単に $s \to t$ と記す．書換え規則が左 (右) 線形であるとは，書換え規則の左辺 (右辺) が線形であることをいう．項書換え系 R のすべての書換え規則が左 (右) 線形であるならば，R は左 (右) 線形であるという．

定義 2.1 代入 σ が線形であるとは，$Codom(\sigma)$ の任意の要素が線形であり，かつ，任意の *2* つの要素間に同じ変数が出現しないことをいう．

代入 σ が代入 σ' に対する付随代入であるとは，$\sigma = \sigma'\sigma^*|_{Dom(\sigma')}$，かつ，$Codom(\sigma^*)$ の任意の要素が変数であるような代入 σ^* が存在することをいう．

同様に，項 t が項 t' に対する付随項であるとは，$t = t'\sigma^*$，かつ，$Codom(\sigma^*)$ の任意の要素が変数であるような代入 σ^* が存在することをいう．

σ が線形な代入 σ' の付随代入であるとき，$\sigma' \triangleright \sigma$ と記す．同様に，項 t が線形な項 t' の付随項であるとき，$t' \triangleright t$ と記す．

例 2.1 代入 $\sigma = \{X \mapsto f(x,y), Y \mapsto g(x)\}$ は線形でないが，代入 $\sigma' = \{X \mapsto f(x,y), Y \mapsto g(z)\}$ は線形である．$\sigma^* = \{z \mapsto x\}$ に対して $\sigma = \sigma'\sigma^*|_{Dom(\sigma')}$ であるから，$\sigma' \triangleright \sigma$ である．また，例えば，$h(f(x,y),g(z)) \triangleright h(f(x,y),g(x))$ である．

次の 2 命題が明らかである．

命題 2.1 代入 σ, σ' がともに線形であり，$Codom(\sigma)$ の各項に現れる各変数が，$Codom(\sigma')$ の各項に現れないとする．このとき，代入 $\sigma\sigma'$ も線形である．

命題 2.2 項 t が線形，代入 σ が線形であり，t に現れる各変数が $Codom(\sigma)$ の各項に現れないとする．このとき，項 $t\sigma$ は線形である．

以降の部分では，任意の項 t に任意の代入 σ を適用するときは，「t に現れる各変数が $Codom(\sigma)$ の各項に現れない」ことが成立していると仮定する．このように仮定してよいのは，本論文では，項に代入を適用するとき，その項は書換え規則の中のものであり，項に出現する変数を適当に名前替えしてよいからである．

命題 2.3 項 t が線形であるとする．代入 σ, σ' について，$\sigma' \triangleright \sigma$ ならば，$t\sigma' \triangleright t\sigma$ である．

(証明)　t が線形，σ' が線形だから，命題 2.2 により，$t\sigma'$ は線形である．また，σ は σ' の付随代入だから，代入 σ^* が存在して $\sigma = \sigma'\sigma^*|_{Dom(\sigma')}$，かつ，$Codom(\sigma^*)$ の任意の要素が変数である．よって，$t\sigma' \triangleright (t\sigma')\sigma^* = t(\sigma'\sigma^*) = t\sigma$ である．□

命題 2.4 項 t, t', t'' について，$t' \triangleright t, t'' \triangleright t$，かつ，$Var(t') \cap Var(t'') = \emptyset$ であるとする．このとき，t', t'' は線形な代入によって単一化可能である．

(証明)　$t' \triangleright t, t'' \triangleright t$ により，t', t'' はともに線形であり，出現する変数名だけが異なる．しかも，$Var(t') \cap Var(t'') = \emptyset$ だから t', t'' は単一化可能である．また，任意の単一化代入は線形である．□

3　CTRS に対する線形な定義書換え系

3.1　線形的定義可能な CTRS

TRS R，項 t_1, t_2 に対し，項 t_3 が存在して $t_1 \xrightarrow{*}_R t_3 \xleftarrow{*}_R t_2$ であるとき，$t_1 \downarrow_R t_2$ と記す．

条件付き書換え規則は，$l \to r \Leftarrow l_1 = r_1, \cdots, l_n = r_n$ の形で表される．ここで，$l, r, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n \in T$，$l \notin V$ である．条件付き書換え規則を単に書換え規則ともいう．本論文では，書換え規則の左辺 l に出現しない変数が，条件部や書換え規則の右辺 r に出現することを許す．このような変数を extra variable (外変数 [6]，余剰変数 [3]) という．条件付き項書換え系 (CTRS) は，条件付き書換え規則の集合である．

CTRS R に対し，TRS $R_0, R_1, \cdots$ を，次のように帰納的に定義する．まず，$R_0 = \emptyset$ とする．次に，$R_{k+1} = \{l\sigma \to r\sigma \mid l \to r \Leftarrow l_1 = r_1, \cdots, l_n = r_n \in R,\ l_i\sigma \downarrow_{R_k} r_i\sigma (1 \le i \le n)\}$ とする．$s \to_R t$ となるのは，ある $k (\ge 0)$ が存在して，$s \to_{R_k} t$ となるとき，かつ，そのときに限る．各 $k (\ge 0)$ に対し，$R_{k+1} \supseteq R_k$ が成立する．$R_0, R_1, \cdots$ を R の定義書換え系という．

CTRS　R が左線形であっても，定義書換え系 $R_0, R_1, \cdots$ は左線形ではない．

例 3.1 次の *CTRS* R を考える．

$$\begin{aligned} R = \quad & \{a(A(x,y),z) \to d(z), \\ & b(C(x,y),z) \to d(B(x)), \\ & f(x_1,x_2) \to g(y_1,y_2) \Leftarrow a(x_1,x_2) \downarrow b(y_1,y_2)\}. \end{aligned}$$

R は左線形である．

R の定義書換え系のうち，R_1 は R の書換え規則のうち条件部のないもの *2* つを含む．いま，$\sigma = \{x_1 \mapsto$

$A(X,X), x_2 \mapsto B(X), y_1 \mapsto C(X,X), y_2 \mapsto D(X)\}$ に対して，$a(A(X,X),B(X)) \to_{R_1} d(B(X)) \leftarrow_{R_1} b(C(X,X),D(X))$ なので，$f(A(X,X),B(X)) \to g(C(X,X),D(X)) \in R_2$ となる．よって，R_2 は左線形でない．

「はじめに」で,「本論文では，左線形な TRS で書換え関係が定義できる CTRS の一つのクラスを与える」と述べた．実は，現在のところ可能なのは，CTRS に左線形性に加え右線形性も課し，左線形かつ右線形な TRS で書換え関係を定義する，という議論である．以下，書換え規則 (TRS，CTRS) が左線形かつ右線形であることを，単に線形であるという．いま，次のような TRS $R'_0, R'_1, \cdots$ を導入する．

定義 3.1 線形な *CTRS* R に対し，*TRS* $R'_0, R'_1, \cdots$ を次のように帰納的に定義する．まず，$R'_0 = \emptyset$ とする．次に，$R'_{k+1} = \{l\sigma \to r\sigma \mid l \to r \Leftarrow l_1 = r_1, \cdots, l_n = r_n \in R,\ l_i\sigma \downarrow_{R'_k} r_i\sigma (1 \le i \le n),\ \sigma|_{Var(l)}, \sigma|_{Var(r)}$が線形な代入 $\}$ とする．

命題 2.2 により，各 $k (\geq 0)$ に対し，R'_k は線形となる．$R'_{k+1} \supseteq R'_k$ も成立する．

以降では，線形な CTRS の次のような (意味的な) サブクラスについて議論する.「CTRS R に対する定義 3.1 の TRS $R'_0, R'_1, \cdots$ について，各 $k (\geq 0)$ に対し $\to_{R'_k} = \to_{R_k}$ が成り立つ.」

定義 3.2 線形な *CTRS* R について，$R_0, R_1, \cdots$ を R の定義書換え系，$R'_0, R'_1, \cdots$ を定義 *3.1* の *TRS* とする．このとき，各 $k (\geq 0)$ に対し $\to_{R_k} = \to_{R'_k}$ ならば，R は線形的定義可能であるという．また，このとき，$R'_0, R'_1, \cdots$ を，R の線形的定義書換え系という．

すなわち，線形的定義可能な CTRS については，その性質に関する議論は，定義書換え系 $R_0, R_1, \cdots$ の代わりに，線形的定義書換え系 $R'_0, R'_1, \cdots$ を用いて行うことができる．

さて，$R_0 = R'_0 = \emptyset$ であるから，$\to_{R_0} = \to_{R'_0} = \emptyset$ である．また，次が成立する．

補題 3.1 任意の *CTRS* R について，各 $k (\geq 0)$ に対し $\to_{R'_k} \subseteq \to_{R_k}$ である．

(証明) k に関する帰納法で示す．$k = 0$ のときは明らかである．$\to_{R'_{k-1}} \subseteq \to_{R_{k-1}}$ を仮定する．R の書換え規則 $l \to r \Leftarrow l_1 = r_1, \cdots, l_n = r_n$ と，代入 σ' に対して，$l_i\sigma' \downarrow_{R'_{k-1}} r_i\sigma' (1 \le i \le n)$ かつ，$\sigma'|_{Var(l)}, \sigma'|_{Var(r)}$ が線形な代入であるとする．このとき，$l\sigma' \to r\sigma' \in R'_k$ である．いま，$\to_{R'_{k-1}} \subseteq \to_{R_{k-1}}$ であるから，$l_i\sigma' \downarrow_{R_{k-1}} r_i\sigma' (1 \le i \le n)$ も成立する．よって，$l\sigma' \to r\sigma' \in R_k$ となる．したがって，$R'_k \subseteq R_k$ となるので，$\to_{R'_k} \subseteq \to_{R_k}$ である． □

そこで，以降では，各 k について $\to_{R_k} \subseteq \to_{R'_k}$ となるための十分条件を考える．

次の命題は明らかである．

命題 3.1 R, R' を *TRS* とする．$l \to r \in R$ に対し，$l' \to r' \in R'$ が存在して，$l' \triangleright l, r' \triangleright r$ であるとする．このとき，$s \to_R t$ ならば，$s \to_{R'} t$ となる．

例 3.2 $f(x,x,x) \to g(x,x) \in R, f(x_0,x_1,x_2) \to g(x_0,x_2) \in R'$ とする．項 s に対し，$f(s,s,s) \to_R g(s,s)$ ならば，$f(s,s,s) \to_{R'} g(s,s)$ である．

これに基づき，次のような記法を用いる．

定義 3.3 *TRS* R, R' について以下の関係が成立するとき，$R' \triangleright R$ と記す．

- $l \to r \in R$ に対し，$l' \to r' \in R'$ が存在して，$l' \triangleright l, r' \triangleright r$ である．

補題 3.2 *CTRS* R に対する定義書換え系を $R_0, R_1, \cdots$，また，$R'_0, R'_1, \cdots$ を定義 *3.1* の *TRS* とする．各 $k (\geq 0)$ について，$R'_k \triangleright R_k$ ならば $\to_{R_k} \subseteq \to_{R'_k}$ が成立する．

(証明) 各 k について以下が成り立つ．$R'_k \triangleright R_k$ により，R_k の任意の書換え規則 $l \to r$ に対し，$l' \to r' \in R'_k$ が存在して，$l' \triangleright l, r' \triangleright r$ である．命題 3.1 により，任意の R_k における書換え $s \to_{R_k} t$ に対し $s \to_{R'_k} t$ となるので，$\to_{R_k} \subseteq \to_{R'_k}$ が成立する． □

任意の R について $R'_0 \triangleright R_0$ は自明だから，以下では,「$R'_{k-1} \triangleright R_{k-1}$ ならば $R'_k \triangleright R_k$」となるための十分条件を与える．

次の命題は，命題 3.1 と対をなす命題である．やはり明らかなので証明は省略する．

命題 3.2 *TRS* の線形な書換え規則によって，$s \to t$ であるとする．このとき，$s' \triangleright s$ である任意の s' に対して，$t' \triangleright t$ である t' が存在して，$s \to t$ に用いたのと同じ書換え規則によって $s' \to t'$ となる．

例 3.3 書換え規則 $f(x_0,x_1,x_2) \to g(x_0,x_2)$ によって，項 s に対し，$f(s,s,s) \to g(s,s)$ であるとする．いま，*3* 項 s_0, s_1, s_2 について，$s_0 \triangleright s, s_1 \triangleright s, s_2 \triangleright s$ で

あるとする．このとき，$f(s_0, s_1, s_2) \triangleright f(s, s, s)$ であるから，$f(s_0, s_1, s_2) \to g(s_0, s_2)$ も可能である．

命題 3.1 と命題 3.2 から次の命題を得る．

命題 3.3 *TRS* R, R' について $R' \triangleright R$ であるとする．$s \xrightarrow{*}_R t$ のとき，$s' \triangleright s$ である任意の s' に対して，$t' \triangleright t$ である t' が存在して $s' \xrightarrow{*}_{R'} t'$ となる．

(証明) $s \xrightarrow{*}_R t$ の長さに関する帰納法で証明する．$s = t$ のときは明らかであるので，$s \to_R s_1 \xrightarrow{*}_R t$ のときを考える．$R' \triangleright R$ と命題 3.1 により，$s \to_R s_1$ に対し，$s \to_{R'} s_1$ となる．さらに，R' は線形だから，命題 3.2 により，$s' \triangleright s$ である任意の s' に対して，$s'_1 \triangleright s_1$ である s'_1 が存在して $s' \to_{R'} s'_1$ となる．帰納法の仮定により，$s_1 \xrightarrow{*}_R t$ と s'_1 に対して，$t' \triangleright t$ である t' が存在して $s'_1 \xrightarrow{*}_{R'} t'$ となる．以上より，$s' \to_{R'} s'_1 \xrightarrow{*}_{R'} t'$ を得る． □

3.2 全線形かつ左選択かつ右自由な CTRS

本節では，線形な CTRS が線形的定義可能となるための，一つの構文的な十分条件を与える．

書換え規則 $l \to r \Leftarrow l_1 = r_1, \cdots, l_n = r_n$ について，$l = r_0, r = l_{n+1}$ とおき，項の列 $r_0, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n, l_{n+1}$ を考える．

定義 3.4 項の列 $r_0, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n, l_{n+1}$ について，

- $r_0, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n, l_{n+1}$ のすべてが線形であるとき，項の列は全線形であるという．
- 各 $i (1 \le i \le n+1)$ について，添字 $h (0 \le h \le i-1)$ が存在して $Var(l_i) \subseteq Var(r_h)$ であるとき，項の列は左選択であるという．
- 各 $i (1 \le i \le n)$ について，r_i に現れる変数は，$r_0, l_1, r_1, \cdots, l_{i-1}, r_{i-1}, l_i$ に現れない変数であるとき，項の列は右自由であるという．

書換え規則 $l \to r \Leftarrow l_1 = r_1, \cdots, l_n = r_n$ について，項の列 $l = r_0, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n, l_{n+1} = r$ が全線形であれば，この書換え規則は全線形であるという．また，*CTRS* R のすべての書換え規則が全線形であれば，R は全線形であるという．左選択性，右自由性についても同様とする．

全線形な R は線形であることを述べておく．

命題 3.4 左選択な項の列 $r_0, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n, l_{n+1}$ と代入 σ について，ある添字 $i (1 \le i \le n+1)$ で以下が成立しているとする．

- 代入 σ' が存在して，各 $j (0 \le j \le i-1)$ について，$\sigma'|_{Var(r_j)} \triangleright \sigma|_{Var(r_j)}$．

このとき，$\sigma'|_{Var(l_i)} \triangleright \sigma|_{Var(l_i)}$ である．

(証明) 項の列の左選択性により，添字 i に対して添字 $h (0 \le h \le i-1)$ が定まり，$Var(l_i) \subseteq Var(r_h)$ である．また，仮定より，$\sigma'|_{Var(r_h)} \triangleright \sigma|_{Var(r_h)}$ である．よって，$\sigma'|_{Var(l_i)} \triangleright \sigma|_{Var(l_i)}$ である． □

命題 3.5 *TRS* R, R' について $R' \triangleright R$ であるとする．また，全線形かつ右自由な項の列 $r_0, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n, l_{n+1}$ と代入 σ について，ある添字 $i (1 \le i \le n)$ で以下の *2* 点が成立しているとする．

- $l_i\sigma \downarrow_R r_i\sigma$,
- 代入 σ' が存在して，$\sigma'|_{Var(l_i)} \triangleright \sigma|_{Var(l_i)}$.

このとき，定義域を $Var(r_i)$ とする代入 τ が存在して，$\tau \triangleright \sigma|_{Var(r_i)}$ かつ $l_i\sigma' \downarrow_{R'} r_i\tau$ を満たす．

(証明) $l_i\sigma \downarrow_R r_i\sigma$ が，$l_i\sigma \xrightarrow{*}_R u \xleftarrow{*}_R r_i\sigma$ であるとする．

いま，l_i は線形であり，$\sigma'|_{Var(l_i)} \triangleright \sigma|_{Var(l_i)}$ なので，命題 2.3 により，$l_i\sigma' \triangleright l_i\sigma$ となる．$R' \triangleright R$ なので，命題 3.3 を用いると，$u' \triangleright u$ である項 u' が存在して，$l_i\sigma' \xrightarrow{*}_{R'} u'$ となる．

定義域を $Var(r_i)$ とする代入 τ' を，$\tau' \triangleright \sigma|_{Var(r_i)}$ を満たし，かつ，$r_i\tau'$ に現れる変数が u' に現れないような代入として導入する．これが可能なのは，項の列の右自由性により，r_i は $r_0, l_1, r_1, \cdots, l_i$ に現れない変数だからである．さて，r_i は線形だから，命題 2.3 により，$r_i\tau' \triangleright r_i\sigma$ となる．命題 3.3 を用いると，$u'' \triangleright u$ である項 u'' が存在して，$r_i\tau' \xrightarrow{*}_{R'} u''$ となる．$r_i\tau'$ に現れる変数は u' に現れないので，書換え系列 $r_i\tau' \xrightarrow{*}_{R'} u''$ において，u'' に現れる変数を u' に現れないようにできる[1]．よって，命題 2.4 により，u', u'' は線形な代入によって単一化可能である．そこで，u' の変数を u'' の変数へ代入する単一化代入 θ を $r_i\tau' \xrightarrow{*}_{R'} u''$

[1] R, R' は TRS としているが，extra variable を許す CTRS に対する R_k, R'_k は TRS とは限らず，書換え規則左辺に現れない変数が右辺に現れることがある．しかし，書換え系列 $r_i\tau' \xrightarrow{*}_{R'} u''$ においてそのような変数への代入を適切に選ぶことにより，u'' に現れる変数を u' に現れないようにできる．

中の各項に適用すると，$r_i\tau'\theta \xrightarrow{*}_{R'} u''\theta = u'$ を得る．いま，$\tau = \tau'\theta|_{Var(r_i)}$ とおく．$r_i\tau'$ に現れる変数は u' に現れないので，$Codom(\tau')$ の各項に現れる変数は，$Codom(\theta) = Var(u')$ の各項に現れない．よって，命題 2.1 により，τ も線形である．したがって，$\tau \triangleright \sigma|_{Var(r_i)}$ かつ $l_i\sigma' \xrightarrow{*}_{R'} u' \xleftarrow{*}_{R'} r_i\tau$ である． □

上記 2 命題から次の命題が得られる．

命題 3.6 *TRS* R, R' について $R' \triangleright R$ であるとする．また，全線形かつ左選択かつ右自由な項の列 $r_0, l_1, r_1, \cdots, l_n, r_n, l_{n+1}$ と代入 σ について，$l_i\sigma \downarrow_R r_i\sigma (1 \leq i \leq n)$ であるとする．このとき，以下を満たす代入 σ' が存在する．

- 各 $i(0 \leq i \leq n)$ について $\sigma'|_{Var(r_i)} \triangleright \sigma|_{Var(r_i)}$．また，各 $i(1 \leq i \leq n+1)$ について $\sigma'|_{Var(l_i)} \triangleright \sigma|_{Var(l_i)}$．
- 各 $i(1 \leq i \leq n)$ について $l_i\sigma' \downarrow_{R'} r_i\sigma'$．

(証明) $Dom(\sigma') = Var(r_0) \cup Var(l_1) \cup Var(r_1) \cup \cdots \cup Var(l_n) \cup Var(r_n) \cup Var(l_{n+1})$ として，$\sigma'|_{Var(r_0)}, \sigma'|_{Var(l_1)}, \cdots$ の順に帰納的に構成する．

まず，$\sigma'|_{Var(r_0)}$ を，$\sigma'|_{Var(r_0)} \triangleright \sigma|_{Var(r_0)}$ を満たす任意の代入とする．このとき，命題 3.4 により，$\sigma'|_{Var(l_1)} \triangleright \sigma|_{Var(l_1)}$ が成立する．

次に，添字 $i(1 \leq i \leq n)$ を固定する．各 $j(1 \leq j \leq i)$ について $\sigma'|_{Var(l_j)} \triangleright \sigma|_{Var(l_j)}$，また，各 $j(0 \leq j \leq i-1)$ について $\sigma'|_{Var(r_j)} \triangleright \sigma|_{Var(r_j)}$ を仮定する．いま，$l_i\sigma \downarrow_R r_i\sigma$ である．命題 3.5 により，代入 τ が存在し，$\tau \triangleright \sigma|_{Var(r_i)}$ かつ $l_i\sigma' \downarrow_{R'} r_i\tau$ を満たす．そこで，$\sigma'|_{Var(r_i)} = \tau$ とする．また，命題 3.4 により，$\sigma'|_{Var(l_{i+1})} \triangleright \sigma|_{Var(l_{i+1})}$ が成立する．

□

補題 3.3 全線形かつ左選択かつ右自由な *CTRS* R において，$R_0, R_1, \cdots$ を R の定義書換え系，$R'_0, R'_1, \cdots$ を定義 *3.1* の *TRS* とする．このとき，$R'_{k-1} \triangleright R_{k-1}$ ならば $R'_k \triangleright R_k$ である．

(証明) R の書換え規則 $l \to r \Leftarrow l_1 = r_1, \cdots, l_n = r_n$ と代入 σ について，$l_i\sigma \downarrow_{R_{k-1}} r_i\sigma (1 \leq i \leq n)$ であるとする．このとき，$l\sigma \to r\sigma \in R_k$ である．いま，$R'_{k-1} \triangleright R_{k-1}$ だから，命題 3.6 により，次を満たす代入 σ' が存在する．$l_i\sigma' \downarrow_{R'_{k-1}} r_i\sigma' (1 \leq i \leq n)$，かつ，$\sigma'|_{Var(l)} \triangleright \sigma|_{Var(l)}, \sigma'|_{Var(r)} \triangleright \sigma|_{Var(r)}$．これより，$l\sigma' \to r\sigma' \in R'_k$ となる．また，l, r は線形であるから，命題 2.3 により，$l\sigma' \triangleright l\sigma, r\sigma' \triangleright r\sigma$ となる． □

これにより，次の主結果が導かれる．

定理 3.1 全線形かつ左選択かつ右自由な *CTRS* は線形的定義可能である．

(証明) CTRS R に対し，各 $k(\geq 0)$ について $R'_k \triangleright R_k$ であることを k に関する帰納法で示す．まず，$R'_0 \triangleright R_0$ である．次に，$R'_{k-1} \triangleright R_{k-1}$ を仮定すると，補題 3.3 により，$R'_k \triangleright R_k$ である．各 $k(\geq 0)$ について $R'_k \triangleright R_k$ であるので，補題 3.2 により，各 $k(\geq 0)$ について $\to_{R_k} \subseteq \to_{R'_k}$ を得る．一方，補題 3.1 により，各 $k(\geq 0)$ について $\to_{R_k} \supseteq \to_{R'_k}$ である．以上より，各 $k(\geq 0)$ について $\to_{R_k} = \to_{R'_k}$ であるので，R は線形的定義可能である．

□

例 3.4 例 *3.1* の *CTRS* R を再掲する．

$$R = \{a(A(x,y),z) \to d(z),\ b(C(x,y),z) \to d(B(x)),\ f(x_1,x_2) \to g(y_1,y_2) \Leftarrow a(x_1,x_2) \downarrow b(y_1,y_2)\}.$$

R は，全線形かつ左選択かつ右自由な *CTRS* である．再度，$\sigma = \{x_1 \mapsto A(X,X), x_2 \mapsto B(X), y_1 \mapsto C(X,X), y_2 \mapsto D(X)\}$ を考える．R の定義書換え系のうち R_1，また，定義 *3.1* の *TRS* R'_1 はともに，R の書換え規則のうち条件部のないもの *2* つを含む．$a(A(X,X),B(X)) \to_{R_1} d(B(X)) \leftarrow_{R_1} b(C(X,X),D(X))$ なので，$f(A(X,X),B(X)) \to g(C(X,X),D(X)) \in R_2$ となる．

R の書換え規則を $r_0 \to l_2 \Leftarrow l_1 \downarrow r_1$ とおく．$\sigma|_{Var(r_0)} = \{x_1 \mapsto A(X,X), x_2 \mapsto B(X)\}$ に対し，代入 $\sigma'|_{Var(r_0)}$ を，$\sigma'|_{Var(r_0)} = \{x_1 \mapsto A(X_1,X_2), x_2 \mapsto B(X_3)\}$ と，線形性を満たすように定める．

いま，代入 $\sigma|_{Var(l_1)} = \sigma|_{Var(r_0)}$ に対し，$\sigma'|_{Var(l_1)} = \sigma'|_{Var(r_0)}$ となる．項 $l_1\sigma'$ に対し，書換え系列 $l_1\sigma' = a(A(X_1,X_2),B(X_3)) \to_{R'_1} d(B(X_3))$ を得る．

一方，$\sigma|_{Var(r_1)} = \{y_1 \mapsto C(X,X)), y_2 \mapsto D(X)\}$ に対し，$\tau' = \{y_1 \mapsto C(X_4,X_5)), y_2 \mapsto D(X_6)\}$ とする．すると，項 $r_1\tau'$ に対し，書換え系列 $r_1\tau' = b(C(X_4,X_5),D(X_6)) \to_{R'_1} d(B(X_4))$ を得る．

ここで，$d(B(X_3))$ と $d(B(X_4))$ は，$\theta = \{X_4 \mapsto X_3\}$ により単一化可能である．これにより，

$\tau = \tau'\theta = \{y_1 \mapsto C(X_3, X_5)), y_2 \mapsto D(X_6)\}$ を得る．$\sigma'|_{Var(r_1)} = \tau$ とおくと，項 $r_1\sigma'$ について，書換え系列 $r_1\sigma' = b(C(X_3, X_5), D(X_6)) \to_{R'_1} d(B(X_3))$ を得る．以上より，$a(A(X_1, X_2), B(X_3)) \to_{R'_1} d(B(X_3)) \leftarrow_{R'_1} b(C(X_3, X_5), D(X_6))$ となる．

さて，$\sigma|_{Var(l_2)} = \sigma|_{Var(r_1)}$ に対し，$\sigma'|_{Var(l_2)} = \sigma'|_{Var(r_1)}$ とする．すると，$l_2\sigma' = g(C(X_3, X_5), D(X_6))$ となる．以上より，線形な書換え規則 $f(A(X_1, X_2), B(X_3)) \to g(C(X_3, X_5), D(X_6)) \in R'_2$ を得る．

4 考察

4.1 得られた十分条件について

本論文では，CTRS に対する線形的定義可能性という概念を導入し，CTRS が線形的定義可能となるための一つの構文的な十分条件を与えた．

本論文で与えた十分条件について，まず，右自由性は,「条件部の extra variable によって計算の途中結果を保持する」という考え方に基づくものであり，extra variable を許す場合の自然な制約と言える．また，右自由性だけであれば，文献 [4] の Right-Stability よりも緩い制約である．次に，左選択性を満たす CTRS は,「$i-1$ 番目の条件で得られた計算結果を用いて，i 番目の条件での計算を行なう」という用途には適合する．また，TRS の書換え規則 $l \to r$ に対する制約 $Var(l) \supseteq Var(r)$ は，左選択性の特別な場合である．これより，左選択性は，TRS における制約を extra variable を許す CTRS に対して拡張したものと考えることもできる．以上より，右自由性，左選択性は，制約としてはある程度の妥当性を有すると考える．しかし，全線形性，とりわけ，書換え規則右辺の線形性 (右線形性) は強い制約である．たとえば，以下の，よく知られている，非負整数 $(0, s(0), \cdots)$ 上の乗算を定義する TRS R は右線形性を満たさない．

$$\begin{aligned} R = \quad & \{x \times 0 \to 0,\ x \times s(y) \to x \times y + x \\ & x + 0 \to x,\ x + s(y) \to s(x+y)\}. \end{aligned}$$

線形的定義可能性の十分条件として右線形性を含まないものを与えることは今後の課題である．

なお，命題 3.2 で，TRS に線形性を要求している．左線形性は線形な項の書換えを可能にするために，右線形性は書換えた結果を線形な項にするために，それぞれ必要である．ここで，右線形性は non-duplicating 性（任意の変数の右辺での出現回数が左辺での出現回数より小さいこと）に替えることが可能である．しかし，左線形かつ non-duplicating ならば，右線形となる．

4.2 CTRS の合流性

TRS の諸性質に関する，線形性を十分条件の一部とする定理がいくつか存在する．本論文の結果とそのような定理を組合せて，CTRS の諸性質に関する議論を行なうことを考える．ここでは，CTRS の合流性を取り上げる．まず，合流性に関する諸概念の定義を記す．

CTRS R において，任意の項 t, t_1, t_2 に対し $t \xrightarrow{*}_R t_1, t \xrightarrow{*}_R t_2$ ならば $t_1 \downarrow_R t_2$ であるとき，R は合流性を満たすという．より強く，CTRS R について，R の定義書換え系 $R_0, R_1, \cdots$ の全てが合流性を満たすならば，R は階層合流性を満たすという．

TRS R の書換え規則 $l \to r, l' \to r'$ について，文脈 $C[\,]$, 項 t が存在して $l = C[t]$，かつ t と l' が単一化可能であるとする．最汎単一化代入を σ とするとき，項の対 $(C[r']\sigma, r\sigma)$ を R における危険対という．R に危険対が存在しないならば，R は重なりがないという．

次の定理が有名である [1].

定理 4.1 重なりがない左線形な *TRS* は合流性を満たす．

本論文の結果から，線形的定義可能な CTRS R の定義書換え系が重なりがない TRS ならば，R は階層合流性を満たすことが言える．

ここまで，CTRS の定義書換え系は「TRS」であるとしてきたが，extra variable を許す CTRS では，定義書換え系が TRS であるとは限らない．すなわち，書換え規則 $l \to r$ に対して，$Var(l) \supseteq Var(r)$ は必ずしも成立しない．左選択性の定義を「各 $i (1 \leq i \leq n+1)$ について，添字 $h \in \{0, \cdots, i-1\}$ が存在して $Var(l_i) = Var(r_h)$」と強めれば，全線形かつ左選択かつ右自由な CTRS の線形的定義書換え系は TRS となる．しかし，そのような制約を課すのは現実的ではない．

また，CTRS に重なりがなくても，定義書換え系に重なりがないとは限らない．

例 4.1 次の *CTRS R(*文献 *[4]* の *Counterexample 3.5)* は，重なりがない．

$$\begin{aligned} R = \quad & \{g(a) \to h(b), \\ & f(x) \to y \Leftarrow x = g(y)\}. \end{aligned}$$

しかし，定義書換え系 $R_2 = \{g(a) \to h(b), f(g(y)) \to y, \cdots\}$ は重なりを持つ．

たとえば，右自由性に加え，条件右辺を構成子項などに限定すれば (文献 [4] の Right-Stability)，定義書換え系は (実質的に) 重なりがない，と予想される．しかし，線形的定義可能であるために，全線形性と左選択性という条件も必要である．右自由性にそのような制約を加えて定義書換え系に重なりがないことが示せたとしても，すべての条件を合わせたクラスは，文献 [4] で階層合流性が示されたクラスのサブクラスとなる．

参考文献

[1] F. Baader and T. Nipkow, “Term rewriting and all that”, Cambridge University Press, 1998.

[2] E. Ohlebusch, “Advanced Topics in Term Rewriting”, Springer, 2001.

[3] 西田 直樹，酒井 正彦，坂部俊樹: “構成子項書換え系の逆計算プログラムの生成”, 電子情報通信学会論文誌 (D-I), Vol.88, No.8, pp.1171–1183, 2005.

[4] T. Suzuki, A. Middeldorp and T. Ida, “Level-Confluence of Conditional Rewrite Systems with Extra Variables in Right-Hand Sides”, Proceedings of the 6th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA’95), Lecture Notes in Computer Science, Vol.914, pp.179–193, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[5] Terese, “Term Rewriting Systems”, Cambridge University Press, 2003.

[6] 山田 俊行, A. Middeldorp, 井田 哲雄, “条件付き項書換え系における階層合流性のモジュラ性”, コンピュータソフトウェア, Vol.12, No.5, pp.474–486, 1995.