決定論的２階パターンとプログラム変換への応用

横山 哲郎　胡 振江　武市 正人

2 階パターンと 2 階照合を用いると高度なプログラム変換を記述することができることが知られている．しかし，2 階照合は NP 困難であるため効率がよい実装が望めない．われわれは，2 階パターンの形を制限することで，どのような項とも得られる最汎照合子が高々1 つである決定論的なパターンのクラスを定め，またこの照合を得るための効率の良いアルゴリズムを開発した．本稿では，このような決定論的 2 階パターンのクラスを拡張し，また線形 2 階パターンが決定論的であるための必要十分条件を与える．このクラスのパターンを用いて幅広いプログラム変換を記述することが可能である．

Second-order patterns and second-order matching play an important role in program transformation, but the second-order matching algorithm is known to be NP-hard and real efficient implementation is out of question. To resolve this problem, we introduced a class of deterministic second-order patterns, and proposed an efficient matching algorithm. In this paper, we further extend this class to cove more deterministic second-order patterns, discuss both sufficient and necessary conditions for a second-order pattern to be deterministic, and demonstrate its usefulness in program transformation.

1　はじめに

プログラム変換は規則をプログラムに順次適用することで行なう．ある規則が適用可能であるかは照合 (matching) が用いられることが多い．照合に用いるパターンは通常の関数型言語で用いられる 1 階のパターンではなく，2 階パターンを用いて記述する規則は記述力が高いことが知られている [4]．そして，実際に，いくつかのプログラム変換システムで採用されている [2] [3].

しかし，2 階照合アルゴリズムは NP 困難である [1] ため効率の良いアルゴリズムの実装は望めない．1 組のパターンと項に高々1 つの照合が存在することを決定論的 (deterministic)，複数の照合方法が存在することを非決定論的であるという．2 階照合は非決定論的であるという欠点がある．このため，ある規則の適用が失敗したとき，なぜ特定の照合が得られないのか理解することが難しいことがある．

単一化の研究において，Miller の決定論的なパターンのクラスが知られている [5]．単一化は照合を一般化した問題なので，Miller の成果はそのまま照合でも用いることができる．しかし，Miller のパターンはプログラム変換に用いるには，記述力が不足しているという問題がある．文献[6] において，われわれは，このパターンのクラスを拡張した．この結果，2 階パターンと 2 階照合による記述力の高さをもったプログラム変換の仕様記述が可能になった．

本稿では，プログラム変換に有用な決定論的パター

Deterministic Second-order Patterns for Program Transformation.

Tetsuo Yokoyama, 東京大学大学院情報理工学系研究科, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo.

Zhenjiang Hu, 東京大学大学院情報理工学系研究科, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo, 科学技術振興機構さきがけ 21, PRESTO21, Japan Science and Technology Agency.

Masato Takeichi, 東京大学大学院情報理工学系研究科, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo.

コンピュータソフトウェア, Vol.21, No.5 (2004), pp.71–76.
[小論文] 2003 年 8 月 12 日受付.

ンのクラスをさらに拡張する．また，この拡張がどこまでできるかというのは理論的に興味のある点である．今回，われわれは，決定論的なパターンのクラスをどこまで広げられるかについて一定の理論的限界を与える．すなわち，線形 2 階パターンが決定論的であるための必要十分条件を与える．

2 決定論的な 2 階パターンのクラス

決定論的な 2 階パターンのクラスを定義するために，準備としていくつかの用語を説明する．

本稿では，定数，変数，適用，λ 抽象によって再帰的に定義される通常の単純型付け λ 項を考える．

$$T \ = \ c \mid v \mid T\ T \mid \lambda x.T$$

読みやすさのため，ときどき $\lambda x_1 \cdots x_l.\, p\, E_1 \cdots E_m$ を $\lambda \bar{x}.\, p\, \bar{E}$，$E_1, E_2, \ldots, E_m$ を $\bar{E}$ と略記する．項 $\lambda \bar{x}.\, B$ が与えられたとき，B をその項の body と呼ぶ．本稿では body は λ 抽象ではないとする．FV を項からその項中の自由変数の集合への関数とする．項 E が自由変数を持たないとき，項 E は閉じているという．同一の自由変数が 1 回しか出現しないパターンを線形という．読みやすさのため，中置演算子を用いる．例えば，$x + y$ は $(+)\ x\ y$ を意味する．通常，定数は a，b，c，束縛変数は x，y，z，自由変数は p，q，r，項は E，T とその周辺の記号で表す．

置換は変数から項への写像として，例えば，次のように書かれる．

$$\phi = \{p \mapsto \lambda x.\, x\ b, q \mapsto p\ (\lambda y.\, y)\}$$

但し，定数 b は定数である．置換 ϕ の定義域を $dom(\phi)$ と記す．本稿では，置換をギリシャ文字で表わす．

$(\lambda x.T_1)\ T_2$ という形をした項を β-redex と呼ぶ．項が β-redex を含まないとき β 正規形と呼ぶ．この β-redex を $T_1\{x \mapsto T_2\}$ に置き換えることを β 簡約と言う．項 T 中で x が自由変数でないとき，$\lambda x.T\ x$ という形をした項を η-redex と言う．この η-redex を T で置き換えることを η 簡約と呼び，η-redex を含まない項を η 正規形と言う．特別な定数 $\square$ を持つ項を文脈と呼び，C，D などで表す．n 個の特別な定数 $\square$ を持つ文脈のすべての $\square$ を左から順に $T_1, \ldots, T_n$ で置き換えて得られる項を $C[T_1, \ldots, T_n]$ と書く．文脈は自由変数を含まないことにする．

項 E_1 が E_2 の部分項と α 変換の下等しいとき，$E_1 \trianglelefteq E_2$ と記す．$v\ T_1\ \cdots\ T_n$ をある項の部分項とし v を変数としたとき，$T_1, \ldots, T_n$ を v の引数と呼び，v をこの部分項の頭と呼ぶ．

$\beta\eta$ 正規形の項 P と閉じた項 T の組 $P \to T$ をルールという．ルール $P \to T$ の項 P，閉じた項 T を照合のパターン，項と呼ぶ．パターン P と閉じた項 T を用いて $\phi\ P =_{\alpha\beta\eta} T$ であることを $\phi \vdash P \to T$ と表し，照合の判定と呼ぶ．この置換 ϕ を求めることを照合，置換 ϕ を照合子 (matcher) と呼ぶ．照合子の内，最も一般的なものを最汎照合子と言う．照合子の値域は閉じた項であるとする．

項 P，Q とが与えられたとき，$\phi\ P =_{\alpha\beta\eta} \phi\ Q$ を満す置換を求めることを単一化 (unification) と呼び，このときの置換 ϕ を単一化子と呼ぶ．項 P，Q は単一化のパターンと言う．項 P，Q と置換 ϕ を用いて，$\phi\ P =_{\alpha\beta\eta} \phi\ Q$ であることを $\phi \vdash P \sim Q$ と表し，単一化 (unification) の判定と呼ぶ．

置換 ϕ, ψ が条件:

$$\forall v \in dom(\phi) \cap dom(\psi)\, .\, \phi\ v =_{\alpha\beta\eta} \psi\ v$$

を満たすとき compatible であるという．ここで，等号 $(=_{\alpha\beta\eta})$ は $\alpha\beta\eta$ 変換における同値関係を表している．置換 ϕ，ψ の合成は compatible であるときのみ定義され，$\phi\, .\, \psi$ と表される．

型は単純型付け λ 項で通常通り構成される．τ_0 を基底型とするとき，型 τ は次のように定義される．

1. $\alpha \in \tau_0$ のとき $\alpha \in \tau$ である．
2. $\alpha, \beta \in \tau$ のとき $\alpha \to \beta \in \tau$ である．
3. τ は (1), (2) 以外のものを含まない．

型 τ の階数 $ord(\tau)$ は次のように定義される．

$$\begin{array}{lcll} ord(\alpha) & = & 1, & \textbf{if } (\alpha \in \tau_0) \\ ord(\alpha \to \beta) & = & max\{ord(\alpha)+1, ord(\beta)\} & \end{array}$$

項の階数はその型の階数である．パターンの階数はパターン中に出現する自由変数の型の階数の最大値である．照合の階数はパターンの階数である．単一化の階数はパターンの階数の最大値である．照合子と単一化子の階数は値域の項の階数の最大値である．

どのような項とも高々1 つの最汎照合子，最汎単一化子しかないようなパターンと，その集合と，そのときのルール，照合，単一化を決定論的であると言う．

本稿では，決定論的単一化の文脈で出てくる Miller の決定論的パターン [5] の内の 2 階のものを拡張する．まずは Miller の高階パターンを 2 階に制限した次のようなパターンを考える．

定義 1 (2 階に制限された Miller のパターン) パターン中の自由変数の引数が互いに異なる束縛変数である 2 階パターンを，制限された Miller の 2 階パターンと呼ぶ． □

例えば，$\lambda x\,y.\,p\ y\ x$ は Miller の高階パターンである．なぜなら，p は 2 階の自由変数であり x, y は互いに異なる束縛変数あるからである．以下このパターンのクラスを拡張していく．

定義 2 $(\mathcal{A}_0^+)$ パターン中の自由変数 p の引数 $E_1, \ldots, E_m$ が次の条件を満たすとき，パターン P は $\mathcal{A}_0^+$ である．

i. 1 階である．

ii. E_i は自由変数を持つ．

iii. q を自由変数とするとき，任意の文脈 D と任意の置換 ϕ について次の判定は成り立たない．

$$\phi \vdash \lambda\bar{x}.\,q\ E_1 \cdots E_{i-1}\ E_{i+1} \cdots E_m \to \lambda\bar{x}.\,D[E_i]$$

iv. E_i 中の自由変数は P 中では自由ではない． □

このパターンは Miller の高階パターンの，自由変数の引数が束縛変数であるという条件を緩めたものである．すなわち，文献[6] の定義 1 の ii の部分の条件を緩めたものである．例えば，$\lambda x\,y.\,p\ x\ (y\ x)$ は $\mathcal{A}_0^+$ である．条件 (i) より $\mathcal{A}_0^+$ は高々2 階のパターンであることが分かる．条件 (iii) は自由変数の引数は互いに他の引数を用いても構成されないことを表している．すなわち，E_i で構成される項は，他の引数の項 $E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_m$ をどのように用いても構成できないのである．直観的にいうと，このことから決定論性が生じている．

定義 2 より，1 階のパターン，2 階に制限された Miller のパターンは $\mathcal{A}_0^+$ に含まれることがすぐに得られる．$\mathcal{A}_0^+$ のパターンは，後述の補題 7 で示すように照合においては決定論的であるが，単一化においてはそうではない．例えば，$\lambda x\,y.\,p\ (c\ x)\ (c\ y)$ と $\lambda x\,y.\,c\ (q\ y\ x)$ には少なくとも

$$\{p \mapsto \lambda x\,y.\,x, q \mapsto \lambda x\,y.\,y\},$$
$$\{p \mapsto \lambda x\,y.\,y, q \mapsto \lambda x\,y.\,x\}$$

という最汎単一化子が存在する．したがって，単一化において $\mathcal{A}_0^+$ は Miller のパターンの拡張にはなっていない．

線形の 2 階パターンが決定論的である条件を後で求めるために，次の定義を用意する．

定義 3 $(\mathcal{A}_0)$ $\mathcal{A}_0^+$ 中の線形項の集合を $\mathcal{A}_0$ とする． □

$\mathcal{A}_0$ に属するパターン中の自由変数の引数の条件を緩め次のような $\mathcal{A}_n$ を再帰的に定義する．

定義 4 $(\mathcal{A}_n)$ $\mathcal{A}_0$ は定義3の通り．$\mathcal{A}_k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ のいずれかに属する $\lambda\bar{x}.\,E_{ij}$ $(1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq m_i)$ を考える．$E_{ij} (1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq m_i)$ が次の条件を満たすとする．

1. 1 階である．
2. q を自由変数とするとき，任意の文脈 D と任意の置換 ϕ について次の判定は成り立たない．

$$\phi \vdash \lambda\bar{x}.\,q\ E_{i1} \cdots E_{i(j-1)}\ E_{i(j+1)} \cdots E_{im_i} \sim \lambda\bar{x}.\,D[E_{ij}]$$

このとき，任意の文脈 C に対して，$p_i (1 \leq i \leq l)$ が自由となる線形項

$$\lambda\bar{x}.\,C[\,p_1\ E_{11} \cdots E_{1m_1}, \ldots, p_l\ E_{l1} \cdots E_{lm_l}, \bar{x}]$$

は $\mathcal{A}_n$ である． □

定義 2 の (ii) は判定に照合を用いていたのは照合の項に自由変数が表れなかったからである．定義 4 の (2) では両辺に自由変数が表れることがあるので単一化を用いている．

パターンのクラス $\mathcal{A}$ を次のように定義する．

定義 5 $(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}$ を $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ とする． □

定義より $\mathcal{A}$ は線形である．

定義 6 (Discharge) 項 T の部分項 $\bar{E}$ を図 1 のように定義される関数 *discharge* によって

$$\mathit{discharge}\ [(x_1, E_1), (x_2, E_2), \ldots, (x_n, E_n)]\ T$$

の返り値で置き換えるとき T から $\bar{E}$ を $\bar{x}$ で discharge するという． □

クラス $\mathcal{A}$ のパターンの照合を求めることと discharge には重要な関係がある．例えば，

$$\lambda x\,y.\,p\ x\ (y\ x) \to \lambda x\,y.\,y\ x\ (d\ x)$$

$$
\begin{array}{l}
\mathit{discharge}\ s\ c\ =\ c\\
\mathit{discharge}\ s\ v\ =\ \mathit{replace}\ s\ v\\
\mathit{discharge}\ s\ (\lambda x.\ T_1)\ =\\
\quad \mathbf{let}\ T' = \mathit{replace}\ s\ (\lambda x.\ T_1)\\
\quad \mathbf{in\ if}\ T' = (\lambda x.\ T_1)\\
\qquad \mathbf{then}\ \lambda x.\ (\mathit{replace}\ s\ T_1)\\
\qquad \mathbf{else}\ T'\\
\mathit{discharge}\ s\ (T_1\ T_2)\ =\\
\quad \mathbf{let}\ T' = \mathit{replace}\ s\ (T_1\ T_2)\\
\quad \mathbf{in\ if}\ T' = (T_1\ T_2)\\
\qquad \mathbf{then}\ ((\mathit{discharge}\ s\ T_1)\ (\mathit{discharge}\ s\ T_2))\\
\qquad \mathbf{else}\ T'\\
\mathit{replace}\ [\,]\ T_1\ =\ T_1\\
\mathit{replace}\ ((E, T') : s)\ T_1\ =\\
\qquad \mathbf{if}\ T' = T_1\ \mathbf{then}\ E\ \mathbf{else}\ \mathit{replace}\ s\ T_1
\end{array}
$$

図 1　Discharge アルゴリズム

の最汎照合子は

$\{p \mapsto \lambda z\,w.\,\mathit{discharge}\ [(w, d\ x), (z, x)]\ (y\ x\ (d\ x))\}$

である．一般に，$\lambda\bar{x}.\,p\ \bar{E} \to \lambda\bar{x}.T'$ のルールの最汎照合子が

$$\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\,B\}$$

のとき

$$B\,\{y_1 \mapsto E_1, \ldots, y_m \mapsto E_m\} = T'$$

という関係がある．特に，$i < j$ ならば，$E_i \not\trianglelefteq E_j$ であるという条件を満す $\bar{E}$ がパターン中では自由ではない自由変数を持つときの最汎照合子は

$$\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\,\mathit{discharge}\ [(y_1, E_1), \ldots, (y_m, E_m)]\ B\}$$

である．

補題 7 (照合の決定論性)すべての i についてルール $X_i = \lambda\bar{x}.\,E_i \to \lambda\bar{x}.\,F_i$ が最汎照合子を決定論的に持つとき，ルール $Y = \lambda\bar{x}.\,c\ \bar{E} \to \lambda\bar{x}.\,d\ \bar{F}$ とルール $Z = \lambda\bar{x}.\,x_j\ \bar{E} \to \lambda\bar{x}.\,x_j\ \bar{F}(1 \leq j \leq m)$ は最汎照合子が存在するならば決定論的に求まる．但し，c, d は定数とし，$\bar{x}$ は空でも良いとする．

証明 $\phi_0 \vdash \lambda\bar{x}.\,c \to \lambda\bar{x}.\,d$ は $c = d$ のとき $\{\phi_0 \mapsto \lambda x.\,x\}$ であり，$c \neq d$ のとき最汎照合子は存在しない．よって ϕ_0 は存在したとすれば決定論的に求まる．また仮定より $\phi_i \vdash X_i(1 \leq i \leq m)$ は決定論的に求まり，互いに compatible であるとき $\phi = \phi_0 . \cdots . \phi_m$ は決定論的に求まり，$\phi \vdash Y$ である．ルール X についても，ルール Y についてと同様の議論で証明できる．□

補題 8 ($\mathcal{A}_0^+$ の照合の決定論性)$\mathcal{A}_0^+$ は決定論的である．

証明 パターンの上での帰納法を用いる．$P \to T$ というルールの照合を行うとする．パターンの形は λ 抽象ではない項 T' を用いて，一般に $\lambda\bar{x}.T'$ と表すことができる．但し $\bar{x}$ は空であることもありえる．T' の頭が定数，束縛変数のときは，帰納法の仮定と補題 7 より P は決定論的パターンである．

P の body の頭が自由変数のときを考える．このとき，$P = \lambda\bar{x}.\,p\ \bar{E}$，$T = \lambda\bar{x}.T'$ と表すことができる．これらの項の最汎照合子は存在するとしたら $\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\,B\}$ という形である．ただし，B は，$k_i < k_j$ ならば $E_{k_i} \not\trianglelefteq E_{k_j}$ であるという条件を満す順に並べた列について

$$B = \mathit{discharge}\ [(y_1, E_{k_1}), (y_2, E_{k_2}), \ldots, (y_m, E_{k_m})]\ T'$$

という条件を満すものを考えれば十分である．なぜなら，照合の値域は閉じているからである．B の値は唯一に決まるので最汎照合子は存在するならば決定論的に求まる．□

系 9 ($\mathcal{A}_0$ の照合の決定論性)$\mathcal{A}_0$ は決定論的である．□

定理 10 (健全性)$\mathcal{A}$ は決定論的である．

証明 $\mathcal{A}$ の構成に関する帰納法，すなわち，$\mathcal{A}_n$ の n に関する帰納法を用いる．パターンが $\mathcal{A}_0$ であるとき系 9 より最汎照合子が存在するならば決定論的に求まる．パターンが $\mathcal{A}_{n+1}(n \geq 0)$ であるときを考える．パターンの body の頭が定数，束縛変数であるとき，補題 8 での議論と同様にして，パターン上の帰納法と帰納法の仮定と補題 7 から証明できる．

よってパターンの body の頭が自由変数であるときのみを考えれば十分である．今，パターンを $P = \lambda\bar{x}.\,p\ \bar{E}$ と置き，$\mathit{dom}(\psi) = \mathit{FV}(P) - \{p\}$ という条件を満たし値域が閉じている置換 ψ を考える． ψ の決め方によらず定義 4 の (2) より，q を自由変数とするとき，任意の文脈 D と任意の置換 ϕ について次の判定は成

り立たない．

$\phi \vdash \lambda\bar{x}.\, q\ F_1 \cdots F_{i-1}\ F_{i+1} \cdots F_m \to \lambda\bar{x}.\, D[F_i]$

ただし，$F_i = \psi\ E_i$ とする．F_i は自由変数を持ち，その自由変数は P 中では自由ではない．よって $\psi\ P$ は $\mathcal{A}_0$ である．したがって，$\psi\ P$ は決定論的パターンである．

次に ψ が決定論的に求まることを示す．パターン P と $\lambda\bar{x}.T'$ についての最汎照合子は存在するとしたら $\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\, B\}$ という形である．ただし，B は，$k_i < k_j$ ならば $F_{k_i} \ntrianglelefteq F_{k_j}$ であるという条件を満す順に並べられた列について

$$B = discharge\ [(y_1, F_{k_1}), (y_2, F_{k_2}), \ldots, (y_m, F_{k_m})]\ T'$$

という条件を満すものを考えれば十分である．ここで，定義 4 より，任意の置換 σ，項 U，文脈 D に対して，

$\sigma \vdash \lambda\bar{x}.\, D[E_{k_i}] \to \lambda\bar{x}.\, U \Rightarrow$

$\sigma \nvdash \lambda\bar{x}.\, q\ E_{k_1} \cdots E_{k_{i-1}}\ E_{k_{i+1}} \cdots E_{k_m} \to \lambda\bar{x}.\, U$

である．よって，T' の部分項のうちうまく ψ をとれば E_{k_i} と等しくなることがある場合は，そのように ψ をとらなければ最汎照合子は存在しない．したがって，最汎照合子 ψ は存在すれば決定論的に求まる．□

一般に，2 階パターンが決定論的であっても必ずしも $\mathcal{A}$ ではない．例えば，p が 2 回出現する非線形なパターン $\lambda x.\, p\ (p\ x)(\notin \mathcal{A})$ は 2 階の決定論的なパターンである．しかし，線形のパターンに限れば 2 階パターンが決定論的であれば必ず $\mathcal{A}$ である．この証明は次の通りである．

定理 11 (**$\mathcal{A}$ の完全性**)線形 2 階パターンが決定論的であれば $\mathcal{A}$ である．

証明 パターン中のある自由変数を p として，その引数を E_1，E_2，…，E_m とする．定義 2 の (i) より，自由変数の引数は 1 階の式であることから，$\forall i.\, ord(E_i) = 1$ である．

まず，自由変数の引数の部分式の中に自由変数が出てこないときを考える．文脈 C を用いて，$\lambda\bar{x}.\, C[p\ \bar{E}, \bar{q}, \bar{x}]$ と書けるパターンについて考えれば十分である．仮定よりパターンは線形であるので，$\lambda\bar{x}.\, C[E_i, \bar{c}, \bar{x}]$ という項との最汎照合子は少なくとも

$$\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\, y_i\} \cup \psi,$$
$$\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\, E_i\} \cup \psi$$

の 2 種類が得られ決定論的ではない．ここで，ψ は，$dom(\psi) = \{\bar{q}\}$ であるような適当な置換である．よってパターンの中の自由変数の引数は自由変数を含んでいなくてはならない．また，文脈 D が与えられたとき，次のような置換が存在したとする．

$$\phi \vdash \lambda\bar{x}.\, r\ E_1 \cdots E_{i-1}\ E_{i+1} \cdots E_m \to \lambda\bar{x}.\, D[E_i] \quad (1)$$

仮定よりパターンは線形であるので，文脈 C が与えられたとき，項 $\lambda\bar{x}.\, C[D[E_i], \bar{c}, \bar{x}]$ との最汎照合子は少なくとも

$$\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\, D[y_i]\} \cup \psi,$$
$$\{p \mapsto \lambda\bar{y}.\, (\phi\ r)\ y_1 \cdots y_{i-1}\ y_{i+1} \cdots y_m\} \cup \psi$$

の 2 種類が得られ決定論的ではない．よって式 (1) を満たす ϕ は存在してはならない．以上より自由変数の引数の部分式の中に自由変数が出てこない線形で決定論的パターンは $\mathcal{A}_0$ である．

次に，自由変数の引数の部分式の中に自由変数が出てくるときを考える．文脈 D が与えられたとき，次のような最汎単一化子が存在したとする．

$$\phi \vdash \lambda\bar{x}.\, r\ E_1 \cdots E_{i-1}\ E_{i+1} \cdots E_m \sim \lambda\bar{x}.\, D[E_i] \quad (2)$$

$\lambda\bar{x}.\, E_i$ 中の自由変数を定義域にもつ置換 ψ を用いて表される次のルールを考える．

$$\lambda\bar{x}.\, C[p\ \bar{E}, \bar{q}, \bar{x}] \to \lambda\bar{x}.\, C[D[\psi\ E_i], \bar{c}, \bar{x}]$$

仮定よりパターンは線形なので，このルールを満たす最汎照合子は少なくとも

$$\{p \mapsto \lambda\bar{x}.\, D[x_i]\} \cup \psi$$
$$\{p \mapsto \lambda\bar{x}.\, (\phi\ r)\ x_1 \cdots x_{i-1}\ x_{i+1} \cdots x_m\} \cup \psi$$

の 2 種類が存在する．よって式 (2) を満たす最汎単一化子が存在してはならない．したがって自由変数の引数の部分式の中に自由変数が出てくる線形パターンが決定論的であるならば $\mathcal{A}_n$ である．

以上より線形 2 階パターンが決定論的であれば $\mathcal{A}$ であることが証明された．□

3 応用

われわれが，Miller のパターンを拡張したそもそものモチベーションはプログラム変換で有用なクラスのパターンを定めることであった．実際，クラス $\mathcal{A}$ はプログラム変換での重要なパターンを記述することができる．例えば，

$$\lambda f\ x.\, \textbf{if}\ p\ x\ \textbf{then}\ q\ x\ \textbf{else}\ r\ x\ (f(s\ x)) \in \mathcal{A}_1$$

$$\lambda x.\ p\ (\mathit{foldr}\ q\ r\ x) \in \mathcal{A}_1$$

などである．但し，p，q，r，s は変数，*foldr* は定数である．1 番目のパターンは多くの再帰プログラムを表すことができる．2 番目のパターンはプログラム変換システム MAG [3](ver.2.1) の融合規則という重要な部分に用いられている．なお，これらのパターンは文献 [6] のパターンでは表現できないので，本稿における成果のひとつである．

線形の 2 階の決定論的パターン $\mathcal{A}$ の定義中には自由変数の引数の間に最汎照合子が存在するかどうかの判定が使われている．実際のプログラム変換では，構文的な条件だけで定められるクラスが望ましい．実際のプログラム変換で十分な記述力をもち，かつ構文的な条件だけで定められるクラスは文献 [6] を参照して欲しい．

4 まとめと今後の課題

本稿では線形 2 階パターンが決定論的であるための必要十分条件を示した．すなわち，決定論的なパターンの拡張の 1 つの限界を示した．また，一般の 2 階照合は NP 困難であるので効率が悪いが，われわれの提案するクラスのパターンについては効率が良い．プログラム変換システムにおける応用の検討や，関数プログラムのパターンを拡張することは今後の課題である．

謝辞

北陸先端科学技術大学院大学の小川瑞史特任教授には，本研究の初期に有益なコメントをいただきました．この場を借りて御礼申し上げます．

参 考 文 献

[1] Baxter, L.: *The complexity of unification*, PhD Thesis, Department of Computer Science, University of Waterloo, 1977.

[2] Bruckner, B., Liu, J., Shi, H., and Wolff, B.: Towards Correct, Efficient and Reusable Transformational Developments, *KORSO: Methods, Languages, and Tools for Construction of Correct Software*, LNCS, Vol. 1009, Springer-Verlag, 1995, pp. 270–184.

[3] de Moor, O. and Sittampalam, G.: Generic Program Transformation, *Third International Summer School on Advanced Functional Programming*, LNCS, Vol. 1608, Braga, Portugal, Springer-Verlag, September 1998, pp. 116–149.

[4] Huet, G. P. and Lang, B.: Proving and Applying Program Transformations Expressed with Second-Order Patterns, *Acta Informatica*, Vol. 11(1978), pp. 31–55.

[5] Miller, D.: A Logic Programming Language with Lambda-Abstraction, Function Variables, and Simple Unification, *Journal of Logic and Computation*, Vol. 1,No. 4(1991), pp. 497–536.

[6] Yokoyama, T., Hu, Z., and Takeichi, M.: Deterministic Second-order Patterns, *International Symposium on Logic-based Program Synthesis and Transformation*, Uppsalla, Sewden, August 2003.