計算モデルの数理：Scott 理論

- λ式の表示する対象は？
  - λ計算法の意味論の展開のために
- 等式による再帰的な関数の定義とは？
  - *fac* (*x*) = if *x=0* then *1* else *x*fac* (*x-1*)
- 表示的意味論(denotational semantics)の基礎

参考書

- Scott, D. and Strachey, C.: Towards a Mathematical Semantics for Computer Languages. PRG-6. Oxford University Programming Research Group, 1971.
- Stoy, J.E.: Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory, The MIT Press, 1977.
- Allison, L.: A Practical Introduction to Denotational Semantics, Cambridge University Press, 1986.

再帰的な関数の定義

- 「等式による定義」と「等式の解」
  - $x=x+1$ は解をもたない
  - $x=x$ の解は無数に存在する
- 再帰的な関数の定義では･･･
  - $f(x)=f(x)+1$ は？
  - $f(x)=f(x)$ は？

等式で「定義する」
ことはできるが･･･

関数の再帰的定義の例

- $f(x)$ = if $x=0$ then 1 else
  if $x=1$ then $f(3)$ else $f(x-2)$

の解は？

① $f(x) = 1$, if $even(x) \wedge x \geqq 0$
  = ⊥, otherwise

② $f(x) = 1$ for all x

③ $f(x) = 1$, if $even(x) \wedge x \geqq 0$
  = a, if $odd(x) \wedge x > 0$
  = b, otherwise

⊥は「未定義」を表わす

不動点(fixed point)

- 前ページの *f* は

$H(g)(x)$ = if $x=0$ then 1 else

if $x=1$ then $g(3)$ else $g(x\text{-}2)$

$f=H(f)$ を満たす

f は *H* の不動点

- 不動点はいくつも存在する
- 「等式による定義」はどの不動点を定義しているのか

関数の自己適用

$$\begin{cases} fac\ (y) = a(a,y) \\ a(b,x) = \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x*b(b,x-1) \end{cases}$$

には再帰性は現れていないが・・・

- *fac (x)* = if *n=0* then *1* else *x*fac (x-1)*と同じ関数
- A: 自己適用関数の集合, N: 自然数の集合

⇩

A=A×N→N の集合Aは存在するか？

演習問題(関数の再帰的定義と自己適用)

- [ST01]　以下のように定義される関数*fac*に対して、*fac(3)*が計算される状況を示せ。

  $fac\ (y) = a(a,y),$

  $a(b,x) = \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x*b(b,x-1)$

- [ST02] 以下の再帰的な定義を、関数の自己適用によるものに書き換えよ。

  $f(x) = \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else}$

  $\qquad \text{if } x=1 \text{ then } f(3) \text{ else } f(x-2)$

計算可能な関数

- 「計算機科学概論」の復習
  - N→N の関数の全体からなる集合の濃度はNより大： |N|<|N→N|
  - N→N の関数のうち、計算可能なものの全体[N→N] は可算: N～[N→N], |N|=|[N→N]|
- [N→N] はどのような集合か？
  - N→Nから[N→N] を特徴づける方法は？

近似による順序(approximating ordering)

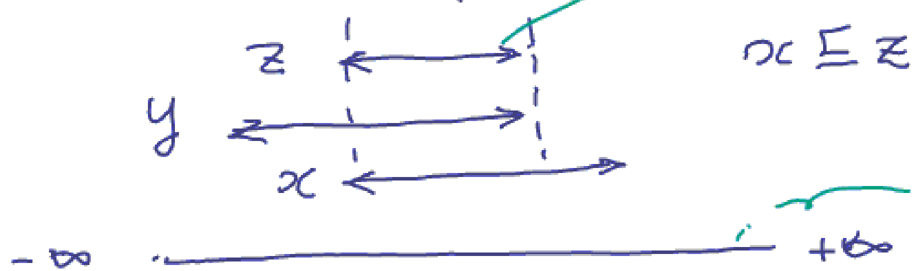
$x \sqsubseteq y$ ： y は x よりも詳しく定義されている

$x \sqcup y$ ： x と y を合わせた情報

$x \sqcap y$ ： x と y に共通の情報

(例) 実軸上の閉区間

$z = x \sqcup y$



$x \sqsubseteq z,\ y \sqsubseteq z$

$\perp$ (bottom)

$[x, x]$ --- 完全に確定した情報

$[0,1] \sqcup [2,3]$ 矛盾した情報 $\top$ (top)

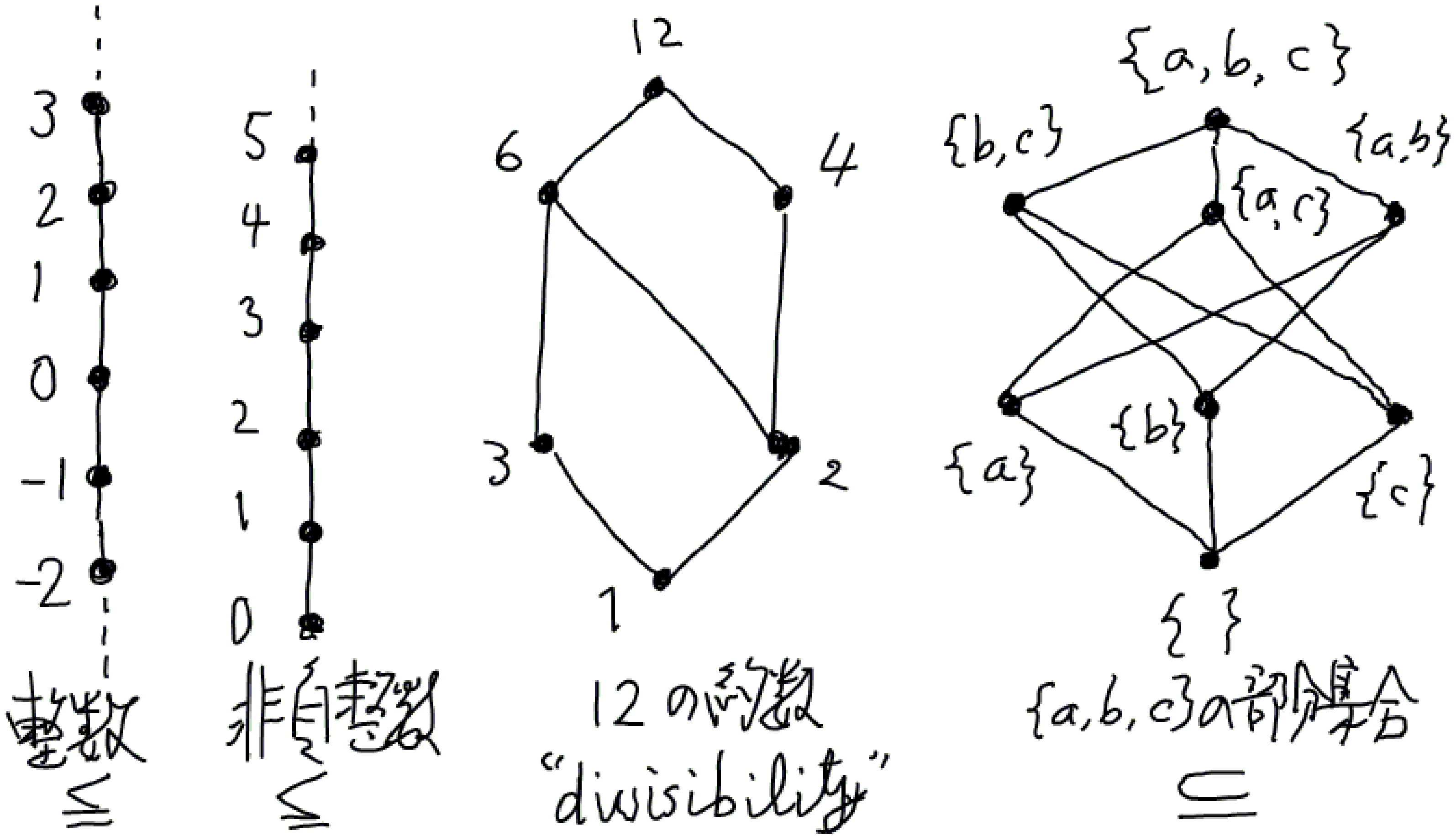
半順序集合(partially ordered set)

定義：集合 P のすべての元 $x, y, z \in P$ に対して以下の条件が成立するとき，P は $\sqsubseteq$ による半順序集合である.

"weaker than"

1. $x \sqsubseteq x$　（反射性）
2. $x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x \equiv y$　（反対称性）
3. $x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z$　（推移性）

半順序集合の例


3
2
1
0
-1
-2
整数
≦
5
4
3
2
1
0
非負整数
≦
12
6
4
3
2
1
12の約数
"divisibility"
{a, b, c}
{b, c}
{a, c}
{a, b}
{a}
{b}
{c}
{ }
{a, b, c}の部分集合
⊆

鎖(chain)/全順序集合(totally ordered set)

定義：半順序集合Pのすべての元$x, y \in P$に対して，$x \le y$ あるいは $y \le x$ が成立するとき，Pは鎖(全順序集合)である．

系：鎖の部分集合は鎖である．

半順序集合の部分集合として鎖が含まれうる．

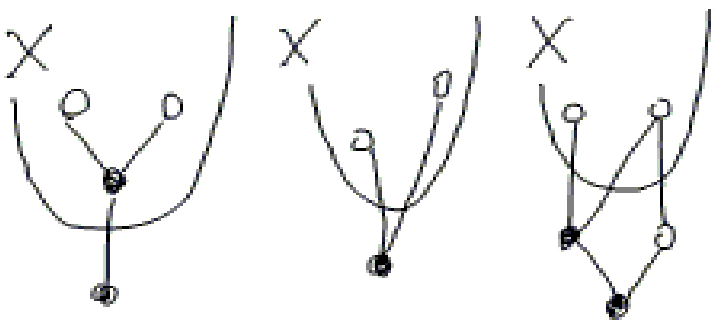
下界(lower bound)/上界(upper bound)

$X \subseteq P$ の下界 $z \in P$:

$\forall x \in X.\ z \sqsubseteq x$

$X \subseteq P$ の上界 $z \in P$:

$\forall x \in X.\ x \sqsubseteq z$



● が X の下界

X の最小元 $z \in X$:

$\forall x \in X.\ z \sqsubseteq x$

X の極小元 $z \in X$:

$y \sqsubseteq z \wedge y \neq z$

$\Rightarrow y \notin X$

最小上界(least upper bound)/上限

$X \subseteq P$ の lub $\sqcup X$ は

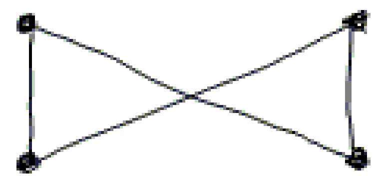
X の上界全体の集合の最小元のこと

- lub は存在するならばただ1つ

(例) $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$ はいずれも $\{\{1\},\{2\}\}$ の上界。$\{\{1\},\{2\}\}$ の lub は $\{1,2\}$。

(例)

複数の上界が存在するが lub はない



完備半順序集合(Complete Partial Order)

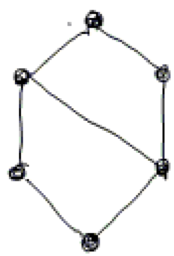
定義：最小元(底要素)をもつ半順序集合 P の部分集合である鎖がどれも最小上界をもつとき、P をCPOという。

[注] 半順序集合の任意の空でない有限部分集合が最小上界と最大下界をもつとき、それを束(lattice)という。また、任意の部分集合についてこれが成り立つような集合を完備束(complete lattice)という。

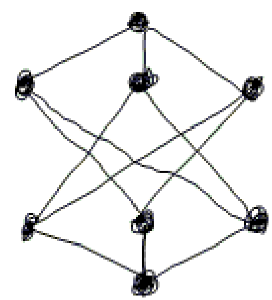
CPO・束の例

(整数, ≦) は束, −∞, +∞ を付加すれば CPO.

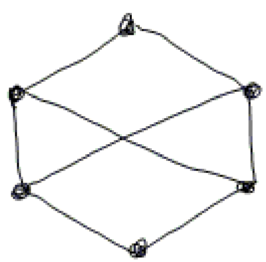
(自然数, ≦) は束, +∞ を付加すれば CPO



は束, CPO.



は束, CPO

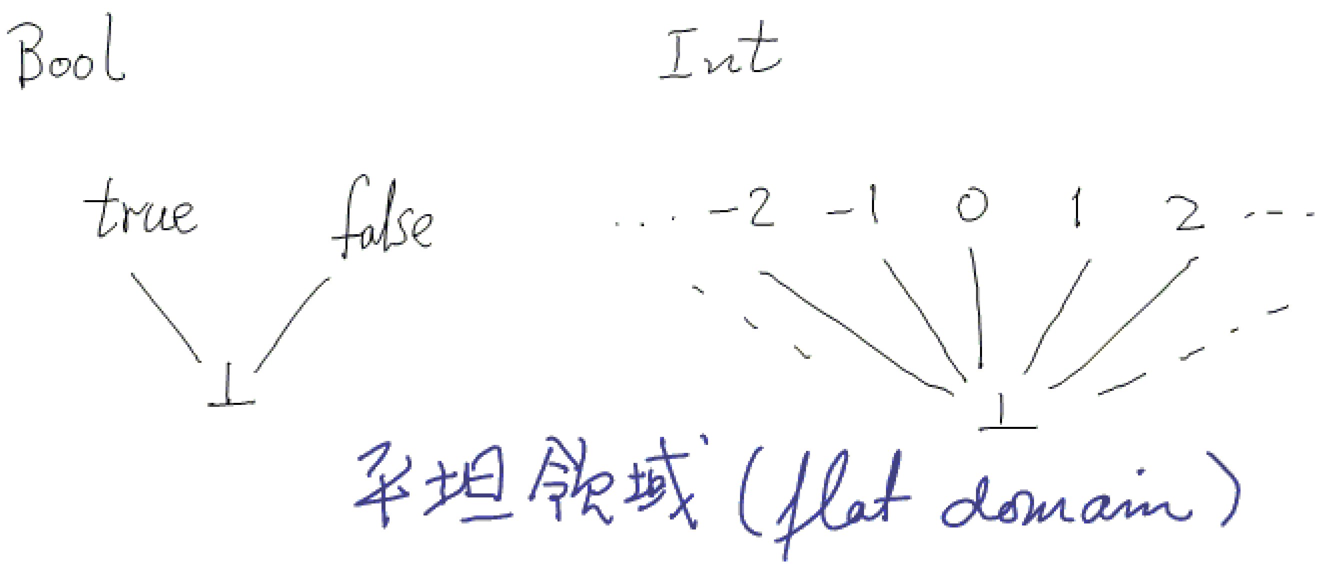


は束でない. (

の lub はない)

データ領域(domain)

- 「近似の度合い」を順序とする完備半順序集合



CPOの直積(product)

CPO $(X, \sqsubseteq_X)$ と $(Y, \sqsubseteq_Y)$ の直積による CPO $(X \times Y, \sqsubseteq)$ を構成

$$X \times Y = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

$$\langle x_1, y_1\rangle \sqsubseteq \langle x_2, y_2\rangle = x_1 \sqsubseteq x_2 \wedge y_1 \sqsubseteq y_2$$

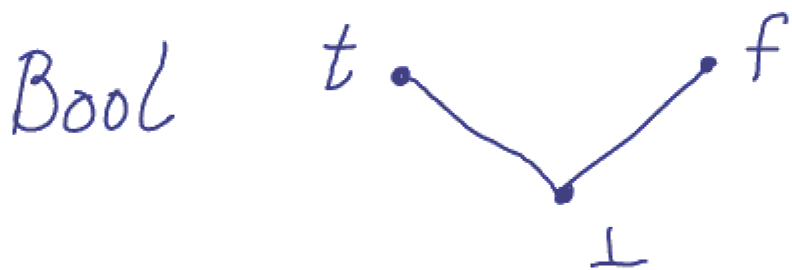
non-strict product

strict product は

$$\langle x, \perp_Y\rangle = \langle \perp_X, y\rangle = \perp_{X \times Y}$$ とする

演習問題(CPOの直積)

- [ST03] 2つのCPOの直積がCPOであることを示せ。
- [ST04] 平坦領域 Bool に対して、non-strict product, strict product のそれぞれの構成法によって作られる Bool×Bool を図示せよ。



CPOの直和(separated sum)

CPO $(X, \sqsubseteq_X)$, $(Y, \sqsubseteq_Y)$ の直和 $(X+Y, \sqsubseteq)$

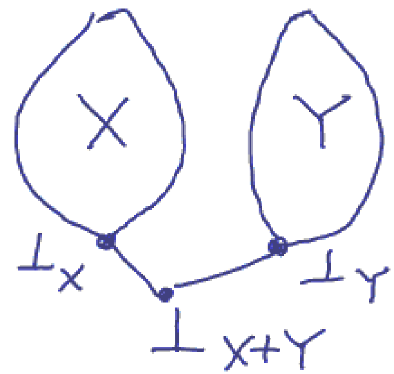
separated sum

$$X+Y = \{\langle x,1\rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle y,2\rangle \mid y \in Y\} \cup \{\perp_{X+Y}\}$$

$\perp_{X+Y} \sqsubseteq \perp_X$, $\perp_{X+Y} \sqsubseteq \perp_Y$

$\langle x,1\rangle \sqsubseteq \langle x',1\rangle$ iff $x \sqsubseteq_X x'$

$\langle y,2\rangle \sqsubseteq \langle y',2\rangle$ iff $y \sqsubseteq_Y y'$



CPO**の直和**(coalesced sum)

CPO $(X, \sqsubseteq_X)$, $(Y, \sqsubseteq_Y)$ の直和 $(X+Y, \sqsubseteq)$

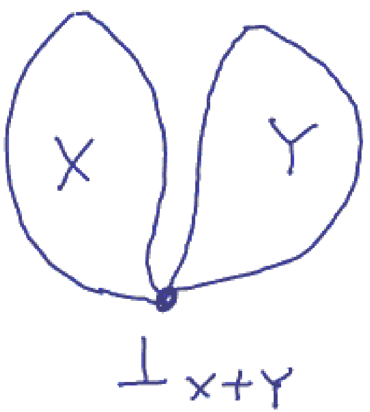
coalesced sum

$$X+Y = \{\langle x,1\rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle y,2\rangle \mid y \in Y\}$$

$$\langle \perp_X, 1\rangle = \langle \perp_Y, 2\rangle = \perp_{X+Y}$$

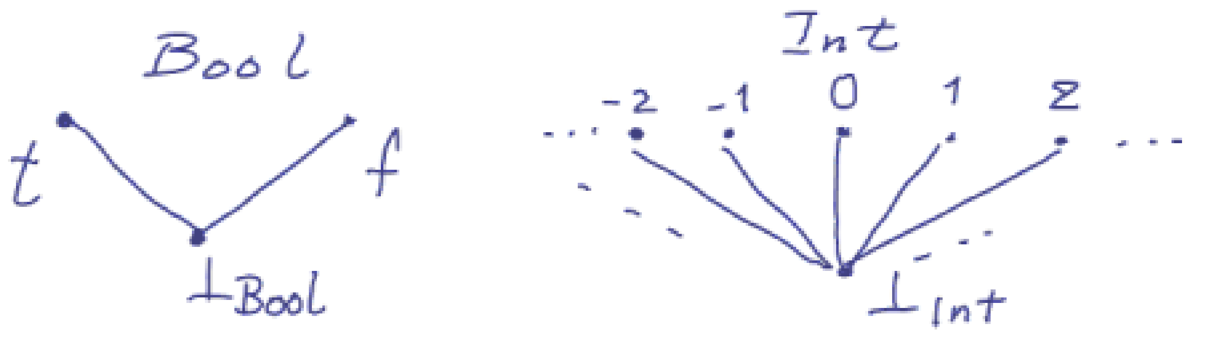
$\langle x, 1\rangle \sqsubseteq \langle x', 1\rangle$ iff $x \sqsubseteq_X x'$

$\langle y, 2\rangle \sqsubseteq \langle y', 2\rangle$ iff $y \sqsubseteq_Y y'$



演習問題(CPOの直和)

- [ST05] 2つのCPOの直和(separated sum, coalesced sum)がCPOであることを示せ。
- [ST06] 平坦領域 Bool と Int のseparated sum, coalesced sum をそれぞれ図示せよ。



CPO上の関数の集合と順序

CPO $(D, \sqsubseteq)$ 上の関数全体の集合

$D \to D$ の上に

$f, g \in D \to D$ に対して

$f \sqsubseteq' g$ <u>iff</u> $\forall x \in D.\ f(x) \sqsubseteq g(x)$

によって順序 $\sqsubseteq'$ を定めると，$(D \to D, \sqsubseteq')$ は順序集合である．

演習問題(CPO上の関数の順序)

- [ST07] 前ページのように定めた順序により関数のなす集合は半順序集合になることを証明せよ。
  - 反射性、反対称性、推移性が成り立つことを示せばよい。
- [ST08] D→D に以下のように順序を導入したときにも半順序集合が得られることを示せ。

“つまらない”

D→D の元で $\forall x \in D.\ \bot'(x) = \bot$ ($\bot$ は D の底要素)
となるような $\bot'$ により

$$f \sqsubseteq'' g \quad \underline{\text{iff}} \quad f = g \text{ または } f = \bot'$$

として $\sqsubseteq''$ を定める。

CPO上の関数のCPO

CPO $(D, \sqsubseteq)$ 上の関数の集合上に定義される順序 $\sqsubseteq'$ による半順序集合 $(D \to D, \sqsubseteq')$ は

$\forall x.\ \perp'(x) = \perp$ （$\perp$ は D の底要素）

である $\perp' \in D \to D$ を底要素とするCPOである。

演習問題(CPO上の関数のCPO)

- [ST09] CPO上の関数の集合がCPOであることを証明せよ。

D→D の任意の部分集合 F に対して、

$$f(x) = \bigsqcup \{ g(x) \mid g \in F \}$$

のように定義すれば $f = \bigsqcup F$ であること、すなわち

(1) $\forall g \in F.\ g \sqsubseteq f$

(2) $\forall h \in D \to D.\ \forall g \sqsubseteq h \Rightarrow f \sqsubseteq h$

を示せばよい。

D→Dの関数と[D→D]の関数

- 完備半順序集合 D→D の元(関数)

$$f(x) = a \text{ , if } x \neq \bot$$
$$\quad\;\; = b \text{ , if } x = \bot$$

$a, b \in$D,
$b \neq \bot$

は「計算可能」か？

  – 「定義されない」要素⊥に対しても、「定義されている」要素 b を与えている

部分関数の全域拡張と[D→D]

- 部分関数の自然な拡張は $f(\perp) = \perp$

正格関数(strict function)

- 非正格関数(nonstrict function)は？
  - $g(x,y,z) = y$, if $x=0$
    $= z$, otherwise

    は、$z=\perp$ に対しても $g(0,y,z)=y$ と定めたい
  - 定数関数 $f(x)=a$ ($a \neq \perp$) は $x=\perp$ に対しても定数を与える

これらも
[D→D]の要素

近似の単調性(monotonicity)

- 「引数が定義される度合が高くなるほど、対応する値が定義される度合が高くなる」
- 計算可能な関数のクラス [D→D] は

$$\{\, f \in D\to D \mid f \text{ は単調} \,\}$$

でよいか？

近似の程度(定義の度合) による
単調性

単調関数(monotonic function)

- 定義

CPO $(D, \sqsubseteq)$ 上の関数 $f \in D \to D$ が

$x \sqsubseteq y$ ならば $f(x) \sqsubseteq f(y)$

を満たすとき, f を単調関数という

  - (注)単調関数がすべて計算可能というわけではない。明らかな計算可能でない関数を除外するだけ。

連続関数(continuous function)

- **定義**

CPO $(D, \sqsubseteq)$ 上の任意の鎖

$$A = a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq \cdots$$

$\{f(a) \mid a \in A\}$

に対して，$f \in D \to D$ が

$$f(\sqcup A) = \sqcup f(A)$$

を満たすとき f を連続関数という

  - **連続関数は上限を保存する関数のこと**

単調関数と連続関数

- **定理：　連続関数は単調である**

Proof.

$x \sqsubseteq y \quad (x, y \in D)$ に対して

$X = \{x, y\}$ とすると X は鎖で,

f の連続性から　　　　　　　　連続性

$$f(x) \sqsubseteq f(x) \sqcup f(y) = \bigsqcup f(X) = f\left(\bigsqcup X\right)$$

$$= f(y)$$

連続でない単調関数の例

$f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$

は単調. しかし, 1に収束する列 $\{x_i\}$
$(x_i<1)$ に対して

$$\bigsqcup\{f(x_1), f(x_2), \cdots\}=0$$

であるが

$$f(\bigsqcup\{x_1, x_2, \cdots\})=1$$

連続性と単調性(1)

任意の $X \subseteq D$ に対して、f が単調ならば、

$$\bigsqcup f(X) \sqsubseteq f(\bigsqcup X)$$

は成り立つが

$$f(\bigsqcup X) \sqsubseteq \bigsqcup f(X)$$

は必ずしも成り立つものではない。

連続性と単調性(2)

- 任意の $X \subseteq D$ に対して

  f が単調 $\Rightarrow \bigsqcup f(X) \sqsubseteq f(\bigsqcup X)$

  逆は必ずしも成立しない

- $\bigsqcup X \in X$ ならば

  任意の f に対して

  $f(\bigsqcup X) \sqsubseteq \bigsqcup f(X)$

  Proof. $\{f(x) \mid x \in X\}$ の lub が $\bigsqcup f(X)$ であるから $\bigsqcup X \in X$ ならば、当然 $f(\bigsqcup X) \sqsubseteq \bigsqcup f(X)$

- 連続性と単調性が区別されるのは無限集合の場合だけ.

連続関数のCPO

CPO D 上の連続関数の全体の集合 $[D \to D]$ 上に

$$f \sqsubseteq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in D.\ f(x) \sqsubseteq g(x)$$

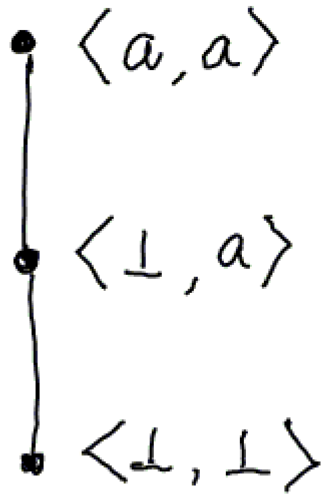
によって順序を定めると、$([D \to D], \sqsubseteq)$ はCPOである。ここに、$S \subseteq [D \to D]$ の上限 $\bigsqcup S$ は

$$\forall x \in D.\ s(x) = \bigsqcup \{f(x) | f \in S\}$$

であるような連続関数 s である。

CPO上の連続関数のCPOの例

- 平坦領域 D={⊥,a} 上の連続関数の全体からなるCPO [D→D]
  - [D→D]の元は3個
  - D→Dの元であって、[D→D]の元ではないものは？



$\langle x, y\rangle(\perp) = x$

$\langle x, y\rangle(a) = y$

演習問題(CPO上の連続関数のCPO)

- [ST10] 平坦領域 Bool={⊥,t,f,}の上の連続関数の全体からなるCPO [Bool→Bool]を図示せよ。関数gを、<g(⊥),g(t),g(f)>のような3つ組で表現して３つ組の間の順序関係を示せばよい。
  – [Bool→Bool]の元の個数はいくつか。
  – Bool→Boolの元であって、[Bool→Bool]の元ではないものの例をあげよ。

基本関数の連続性(1)

- not :[Bool→Bool]
  - not **は演習問題**[ST10]**の**[Bool→Bool]**のひとつの元**<⊥,f,t>: not(⊥)=⊥, not(t)=f, not(f)=t
  - not**を** <t,f,t>, <f,f,t>**とするわけにはいかない**
- true:[Bool→Bool] (**定数関数**)
  - <⊥⊥,t,t>　　**正格**(strict)
  - <t, t, t>　　　**非正格**(nonstrict)

基本関数の連続性(2)

or: [Bool×Bool→Bool]

or(x, y)

x \ y	⊥	t	f
⊥	⊥	⊥/t	⊥
t	⊥/t	t	t
f	⊥	t	f

and: [Bool×Bool→Bool]

and(x, y)

x \ y	⊥	t	f
⊥	⊥	⊥	⊥/f
t	⊥	t	f
f	⊥/f	f	f

⊥/t, ⊥/f **は正格性によって決まる。**

基本関数の連続性(3)

- cond<x,y>(b) = if b then x else y

  cond<x,y> (⊥) = ⊥

  cond<x,y> (t) = x

  cond<x,y> (f) = y

  – cond**は条件判定の引数に関して正格**

基本関数の連続性(4)

- Int×Int→Int の算術演算はいずれの引数に対しても正格(strict)
  - ⊥+x=x+⊥=⊥
  - そうでない妥当な定義は考えられるか？
- その他の基本関数も連続である (連続な関数として定義できる)

連続関数の不動点(fixed point)

定理　CPO $(D, \sqsubseteq)$ 上の連続関数 $f \in [D \to D]$ は不動点をもつ。

(証明)

D は完備 $\Rightarrow \bot \sqsubseteq f(\bot)$.

f は単調 $\Rightarrow f(\bot) \sqsubseteq f(f(\bot))$.

$\bot \sqsubseteq f(\bot) \sqsubseteq f(f(\bot)) \sqsubseteq \cdots$ は最小上界 u をもつ。f の連続性から、

$$f(u) = f(\bigsqcup\{f^i(\bot)\}) = \bigsqcup\{f\{f^i(\bot)\}\} = u$$

最小不動点(least fixed point)

- **連続関数の最小不動点：**
  - **前頁の**u**は最小不動点**

不動点 v が存在するものとすると、

$\perp \sqsubseteq v$, $f(\perp) \sqsubseteq f(v) = v$ より

$f^2(\perp) \sqsubseteq v$. したがって $u \sqsubseteq v$

(**注意**)
succ(x)=x+1**のように、一見、存在しそうにない関数にも不動点は存在する。どのような関数か？**

最小不動点の例(1)

$$f(x) \;=\; \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (2x-1) + f(x-1)$$

の解は

$$H(g)(x) \;=\; \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (2x-1) + g(x-1)$$

の不動点。H の最小不動点を $f_0 = \perp, f_1 = H(f_0), f_2 = H(f_1), \cdots$ によって求める。

$$f_0 \;=\; H(\perp) \;=\; \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } \perp$$

$$f_1 \;=\; H(f_0) \;=\; \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else if } x = 1 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } \perp$$

のようにして、この列が $f(x) = x^2$ に収束することがわかる。

最小不動点の例(1)つづき

$H(g)(x)=$ if $x=0$ then 0 else $(2x-1)+g(x-1)$

f_i	$\perp$	0	1	2	3	4	5
f_0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
f_1	$\perp$	0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
f_2	$\perp$	0	1	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
f_3	$\perp$	0	1	4	$\perp$	$\perp$	$\perp$
f_4	$\perp$	0	1	4	9	$\perp$	$\perp$

最小不動点の例(2):McCarthyの91関数

$$H(g)(x) \;=\; \textbf{if}\ x > 100\ \textbf{then}\ x - 10\ \textbf{else}\ g(g(x+11))$$

では、$1 \leq i \leq 11$ に対して

$$H^i(\perp)(x) \;=\; \textbf{if}\ x > 100\ \textbf{then}\ x-10\ \textbf{else}\,\textbf{if}\ x > 101-i\ \textbf{then}\ 91\ \textbf{else}\ \perp$$

$i \geq 11$ に対して

$$H^i(\perp)(x) \;=\; \textbf{if}\ x > 100\ \textbf{then}\ x-10\ \textbf{else}\,\textbf{if}\ x > 90-11(i-11)\ \textbf{then}\ 91\ \textbf{else}\ \perp$$

であり、鎖 $\{H^i(\perp)\}$ の最小上界 (H の最小不動点) は

$$\textbf{if}\ x > 100\ \textbf{then}\ x - 10\ \textbf{else}\ 91$$

演習問題(最小不動点)

[ST11] $H(g)(x)$ = if $x=0$ then 1 else if $x=1$ then $g(3)$ else $g(x-2)$ の最小不動点を求めよ。また、その近似の様子を示せ。

[ST12] $H(g)(x) = g(x)$, および $H(g)(x) = g(x)+1$の最小不動点を求めよ。